Binomio di Newton

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + \dots + ?\,a^3b^4 + \dots + a^2b^5$$

$$(a+b)^7 = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{7 \text{ volte}} =$$

$$= aaaaaaa + aaaaaab +$$

Il coefficiente di a^3b^4 si ottiene così:
dei 7 fattori $(a+b)$ che ho scritto sopra devo sceglierne 4 da cui estrarrò la b. Dagli altri 3 estrarrò la a.

$$C_{7,4} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{3!}} = 35.$$

$$(a+b)^7 = \underbrace{\binom{7}{0}}_{=1} a^7 + \underbrace{\binom{7}{1}}_{=7} a^6 b + \underbrace{\binom{7}{2}}_{=21} a^5b^2 + \underbrace{\binom{7}{3}}_{35} a^4b^3 + \underbrace{\binom{7}{4}}_{=35} a^3b^4 +$$

$$+ \underbrace{\binom{7}{5}}_{=21} a^2b^5 + \underbrace{\binom{7}{6}}_{=7} ab^6 + \underbrace{\binom{7}{7}}_{=1} b^7 =$$

$$= \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} a^{7-k} b^k$$

In generale

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$(a+b)^0$ 1

$(a+b)^1$ 1 1

$(a+b)^2$ 1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

$\boxed{n=6}$ 1 6 15 $\binom{n}{k-1}$ 20 15 $\binom{n}{k}$ 6 1

$n=7$ 1 7 21 35 35 21 7 1

$\binom{n+1}{k}$

Ogni elemento è la somma dei due che gli stanno sopra.

Per provare la proprietà del triangolo di Tartaglia, devo provare che

$$(*) \qquad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \qquad \forall n \geq 1 \quad \forall k \leq n.$$

Dimostriamo la $(*)$

$$\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}} \qquad (*)$$

$$\frac{(n+1)\cancel{!}}{k\cancel{!}\,(n+1-k)\cancel{!}} \overset{?}{=} \frac{\cancel{n!}\ 1}{k\cancel{!}\,\cancel{(n-k)!}\ 1} + \frac{\cancel{n!}\ 1}{\cancel{(k-1)!}\,(n-k+1)\cancel{!}}$$

$$\frac{n+1}{k(n+1-k)} \overset{?}{=} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}$$

$$\frac{n+1}{k(n+1-k)} = \frac{n-\cancel{k}+1+\cancel{k}}{k\,(n+1-k)} \qquad \text{ok!}$$

Interpretazione combinatoria di (*)

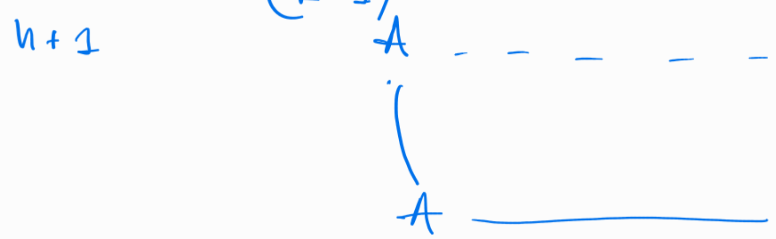
$$\underbrace{\binom{n+1}{k}}_{\|} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

numero di modi di estrarre un sottoinsieme di k elementi da un insieme di $n+1$ elementi distinti.

Fisso un elemento degli $n+1$ elementi, chiamandolo A.

Quanti sono i sottoinsiemi di k elementi che non contengono A?
Sono $\binom{n}{k}$.

Quanti sono i sottoinsiemi di k elementi che contengono A?
Sono $\binom{n}{k-1}$



$(fg)' = f'g + fg'$ **Applicazione alle derivate iterate di un prodotto**

$$(fg)'' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

$$(fg)''' = f'''g + f''g' + 2f''g' + 2f'g'' + f'g'' + fg'''$$

$$= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} \quad \text{formula di Leibniz.}}$$

$$(a+b+c)^{50} = a^{50} + 50a^{49}b + 50a^{49}c + \dots$$

$$+ \;??\; a^4 b^{31} c^{15}$$

$$(a+b+c)^{50} = \underbrace{(a+b+c)(a+b+c)\dots\dots(a+b+c)}_{50 \text{ volte}}$$

Di questi cinquanta fattori,
Devo sceglierne 4 da cui estraggo la a;

dei rimanenti 46, devo sceglierne 31 da cui estrarre la b;

dai rimanenti 15, estraggo la c.

In quanti modi diversi lo posso fare?

$$\binom{50}{4}\binom{46}{31} = \frac{50!}{4!\,\cancel{46!}}\;\frac{\cancel{46!}}{31!\,15!} = \frac{50!}{4!\,31!\,15!}$$

modi di estrarre la a

modi di estrarre la b

$$\boxed{= \binom{50}{4,31,15} \quad \text{coeff}^{\text{ti}} \text{ multinomiali}}$$

Coeff$^{\text{ti}}$ multinomiali:

$$\binom{n}{k_1,k_2,k_3} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} \qquad \text{con } k_1+k_2+k_3=n.$$

e si può fare per un numero diverso di componenti

$$\binom{n}{k_1,k_2,\dots k_h} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_h!} \qquad \text{con } k_1+k_2+\dots+k_h=n.$$

I coeff^{ti} binomiali sono un caso particolare dei coeff^{ti} multinomiali:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k,\ n-k}$$

coeff^{ti} binomiale. Abbiamo giustificato la seguente formula:

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{k_1,k_2,k_3 \in \mathbb{N} \\ k_1+k_2+k_3=n}} \binom{n}{k_1,k_2,k_3} a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3}$$

e in generale per le potenze di un polinomio.

$$(x_1+x_2+\dots+x_h)^n = \sum_{\substack{k_1,k_2\dots k_h \in \mathbb{N} \\ \text{t.c.} \\ k_1+k_2+\dots+k_h=n}} \underbrace{\binom{n}{k_1,k_2\dots k_h}}_{\frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_h!}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_h^{k_h}$$