TEOREMA

1) Facendo il prodotto di due numeri complessi, i moduli si moltiplicano, gli argomenti si sommano

$$zw = |z||w|\left(\cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta)\right)$$

se $z = |z|\underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{e^{i\varphi}}$, $w = |w|\underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)}_{e^{i\theta}}$

2) Facendo il rapporto di due numeri complessi, i moduli si dividono, gli argomenti si sottraggono.

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\left(\cos(\varphi-\theta) + i\sin(\varphi-\theta)\right)$$

Questo suggerisce una notazione di tipo esponenziale.

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad \forall\varphi\in\mathbb{R}$$

$$e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1.$$

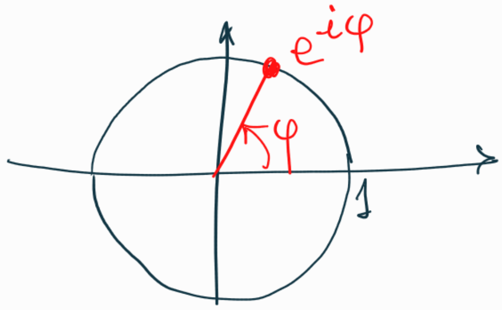
$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0 \qquad \text{Formula di Eulero}}$$

$$e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

$e^{i\varphi}$



Con questa notazione, il precedente teorema diventa naturale:

se $z = |z|e^{i\varphi}$, $w = |w|e^{i\theta}$

1) $zw = |z|e^{i\varphi}|w|e^{i\theta} = |z||w|e^{i(\varphi+\theta)}$

2) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|e^{i\varphi}}{|w|e^{i\theta}} = \dfrac{|z|}{|w|}e^{i(\varphi-\theta)}$.

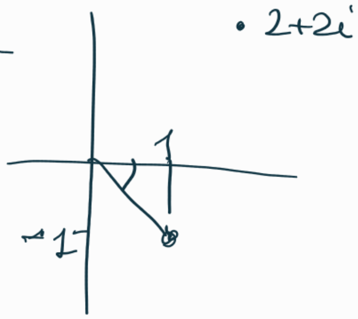
Esercizio. Dati $z = 1-i$, $w = 2+2i$, trovare zw e $\dfrac{z}{w}$.

1) In coordinate cartesiane

$$zw = (1-i)(2+2i) = 2 + \cancel{2i} - \cancel{2i} + 2 = 4$$

$$\frac{z}{w} = \frac{1-i}{2+2i}\cdot\frac{2-2i}{2-2i} = \frac{\cancel{2}-2i-2i-\cancel{2}}{4+4} = \frac{-4i}{8} = -\frac{i}{2}$$

2) In coord. polari $z = 1-i = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{7}{4}\pi}$



$$w = 2+2i = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z\cdot w = 2\sqrt{2}\sqrt{2}\,\underbrace{e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}}}_{e^{i0}=1} = 4$$

$$\frac{z}{w} = \frac{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2}\underbrace{e^{-i\frac{\pi}{2}}}_{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-i} = -\frac{i}{2}$$

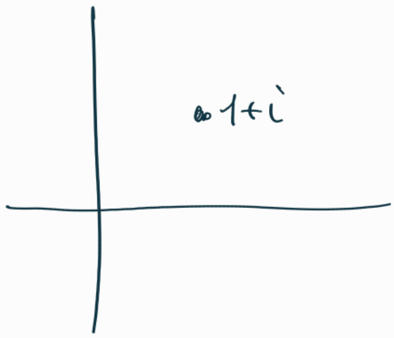
Calcolare $(1+i)^4 = (1+i)(1+i)(1+i)(1+i)$

In coord. cartesiane (uso il binomio di Newton)

$$(1+i)^4 = 1^4 + 4\cdot 1^3 i + 6\cdot 1^2 i^2 + 4\cdot 1\cdot i^3 + i^4 =$$

$$= 1 + \cancel{4i} - 6 - \cancel{4i} + 1 = -4$$

In coord. polari



$$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(1+i)^4 = (\sqrt{2})^4 e^{i\frac{\pi}{4}\cdot 4} = 4e^{i\pi} = -4.$$

$$\boxed{(1+i)^{17}}$$

In coord. cartesiane

$$(1+i)^{17} = 1^{17} + 17\cdot 1^{16} i + \binom{17}{2} 1^{15} i^2 + \dots$$

non particolarmente conveniente.

In coord. polari

$$(1+i)^{17} = (\sqrt{2})^{17} e^{i\frac{\pi}{4}17} = 256\sqrt{2}\, \underbrace{e^{i\frac{17\pi}{4}}}_{= e^{i\frac{\pi}{4}}} = 256\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} =$$

$$= 256\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= 256\,(1+i)$$

Potenze intere di un numero complesso.

Se $z = |z| e^{i\varphi}$, $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow$ $\boxed{z^n = |z|^n e^{i\varphi n} = |z|^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right)}$

OSS. La formula $\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}$ si scrive esplicitamente come

$$\boxed{\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) \qquad \forall n\in\mathbb{N}}$$

Formula di De Moivre.

Radici n-esime di un numero complesso

Sia $z\in\mathbb{C}$. Sia $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Voglio risolvere l'eq^ne^

$$w^n = z \qquad \text{in } w\in\mathbb{C}$$

Cioè voglio trovare le radici n-esime di z, cioè tutti quei numeri complessi w t.c. $w^n = z$.

- Caso banale: $z=0$ $\qquad w^n = 0 \iff w=0$.

- Caso interessante: $z\neq 0$. $\Rightarrow z = |z|e^{i\varphi}$.

w (incognita) $= |w|e^{i\theta}$

$w^n = z$ diventa $|w|^n e^{in\theta} = |z|e^{i\varphi}$

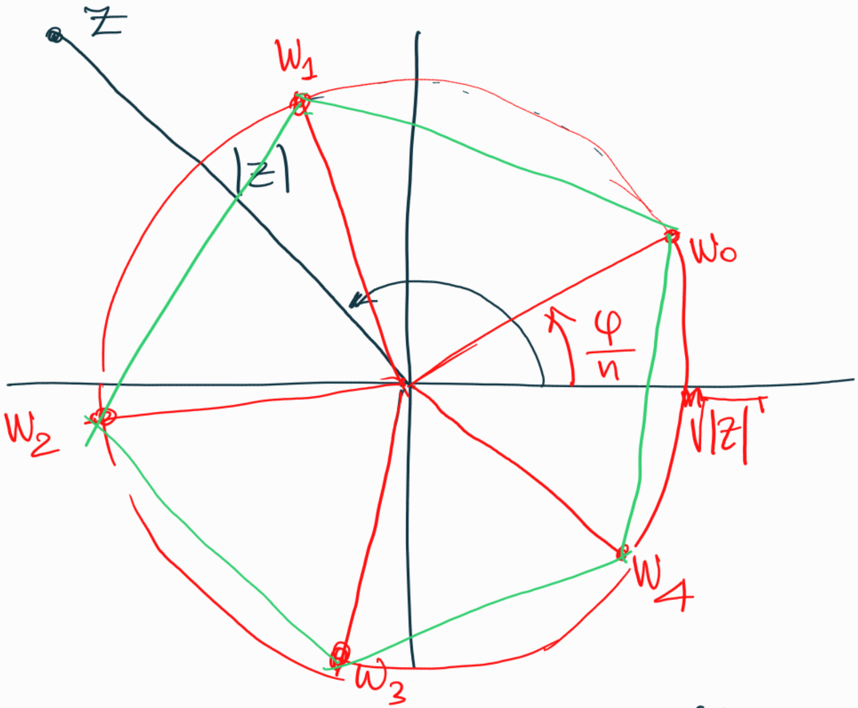
deve essere $|w|^n = |z| \iff |w| = \sqrt[n]{|z|}$ (radice n-esima reale)

$$n\theta = \varphi + 2k\pi \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

$$\theta = \theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

$$k=0 \Rightarrow \theta_0 = \frac{\varphi}{n} \Rightarrow w_0 = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\varphi}{n}}$$

$$k=1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{\varphi + 2\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \Rightarrow w_1 = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)}$$



$k=2 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\varphi+4\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n} \Rightarrow w_2 = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{4\pi}{n}\right)}$

$k=3$

$k=4$

$k=n-1$

$k=n \Rightarrow \theta_n = \frac{\varphi+2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$

$\Rightarrow w_n = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\varphi}{n}} = w_0$

e si ripetono tutti: $w_{n+1} = w_1$, $w_{n+2} = w_2$

Le radici n-esime di z sono n

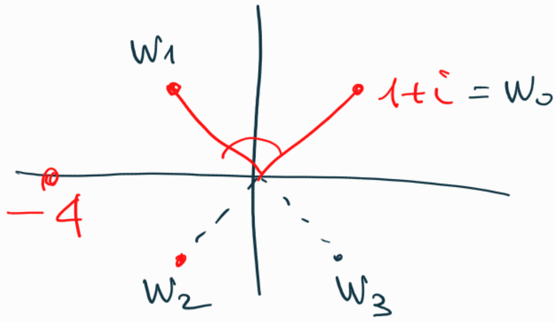
TEOREMA Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Le radici n-esime di z sono n e si scrivono così:

$w_k = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\theta_k}$ dove $\theta_k = \frac{\varphi+2k\pi}{n}$, $k=0,1,\dots,n-1$.

radice n-esima di un numero reale positivo dove $z = |z| e^{i\varphi}$.

Tali n radici si trovano sui vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[n]{|z|}$ centrata nell'origine.

$\boxed{\text{Trovare le radici quarte di } -4}$



$$-4 = 4e^{i\pi}$$

Le radici quarte di -4 sono

$$w_k = \underbrace{\sqrt[4]{4}}_{\sqrt{2}}\, e^{i\theta_k} \qquad \text{dove} \quad \theta_k = \frac{\pi + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

$$k = 0, 1, 2, 3.$$

$$w_0 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+i$$

$$w_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1+i$$

$$w_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}} = -1-i$$

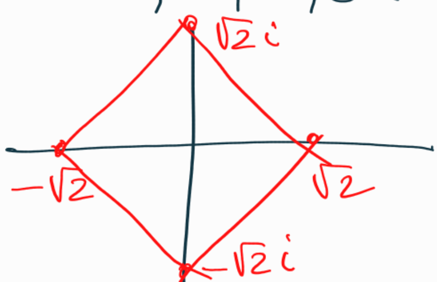
$$w_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}} = 1-i$$

$\boxed{\text{Le radici quarte di } 4:}$

$$4 = 4e^{i0}$$

$$w_k = \underbrace{\sqrt[4]{4}}_{= \sqrt{2}}\, e^{i\theta_k} \qquad \theta_k = \frac{0 + 2k\pi}{4} = \frac{k\pi}{2}$$

$$k = 0, 1, 2, 3.$$



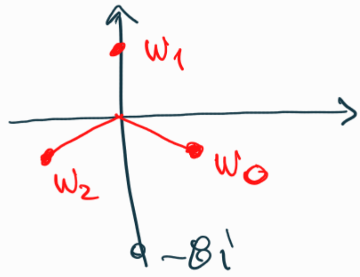
$$w_0 = \sqrt{2}\, e^{i0} = \sqrt{2}$$

$$w_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}i$$

$$W_2 = \sqrt{2}\, e^{i\pi} = -\sqrt{2}$$

$$W_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{2}\pi} = -\sqrt{2}\, i$$

Radici cubiche di $-8i$



$$-8i = 8\, e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Radici cubiche

$$W_k = \underset{\substack{\| \\ 2}}{\sqrt[3]{8}}\, e^{i\theta_k} \qquad \theta_k = \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$$

$k = 0, 1, 2$

$$W_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

$$W_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$$

$$W_2 = 2e^{i\frac{7}{6}\pi} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$$

Radice quadrate di -4.

$$-4 = 4e^{i\pi}$$

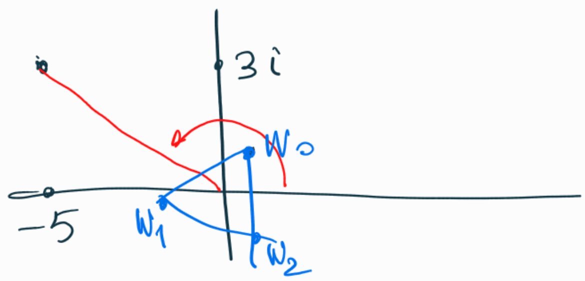
$$W_0 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$$

$$W_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$$

Calcolare le radici terze di $z = -5 + 3i$

$$z = \sqrt{34}\, e^{i\varphi}$$

$$\begin{cases} \sqrt{34} \cdot \cos\varphi = -5 \\ \sqrt{34}\, \sin\varphi = 3 \end{cases}$$



$$\cos\varphi = -\frac{5}{\sqrt{34}} \qquad \varphi = \pi - \arcsin\frac{3}{\sqrt{34}} = \arccos\left(-\frac{5}{\sqrt{34}}\right)$$

$$\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$W_k = \sqrt[6]{34}\, e^{i\theta_k} \qquad \theta_k = \frac{\varphi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \qquad k = 0,1,2$$

$$W_0 = \sqrt[6]{34}\, e^{i\frac{\varphi}{3}}$$

$$W_1 = \sqrt[6]{34}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$W_2 = \sqrt[6]{34}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)}$$

Esercizio: Risolvere l'eq^{ne} $|z|^3 z^3 = 64i$.

$$z = |z| e^{i\varphi}$$

$$|z|^3 z^3 = |z|^3 |z|^3 e^{i3\varphi} = |z|^6 e^{i3\varphi} = 64\, e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

$$\Rightarrow |z|^6 = 64 \Longrightarrow |z| = \sqrt[6]{64} = 2.$$

$$3\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$$

$\cancel{k \in \mathbb{Z}}$

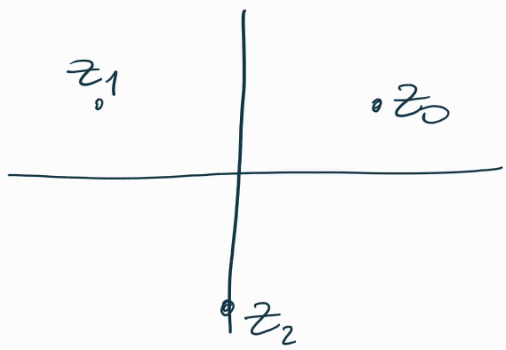
$k = 0, 1, 2.$

$$z_k = 2\, e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \qquad k = 0,1,2.$$

$$z_0 = 2\, e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2\, e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2\, e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$$



Quando conviene usare coord. polari e quando coord. cartesiane per risolvere un'eq^{ne}?

- In linea di massima:

Coord. cartesiane se ci sono prevalentemente somme/differenze.

es. $z+\bar{z}-3\,\mathrm{Im}(z)=z^2+|z|$

Coord. polari se ci sono prevalentemente potenze/prodotti/rapporti

es: $|z|^3 z^3 = 64i$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Un polinomio $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 =$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k z^k ,$$

dove $a_n, a_{n-1}, \dots a_0 \in \mathbb{C}$ t.c. $a_n \neq 0$, e la variabile $z \in \mathbb{C}$, ammette sempre una radice complessa, cioè un numero $z_1 \in \mathbb{C}$ t.c. $P_n(z_1)=0$. (Quindi il polinomio è divisibile per $z-z_1$)

Ne segue che esistono n numeri complessi (anche tra loro coincidenti) $z_1, z_2, \dots z_n$ t.c

$$P_n(z) = a_n (z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)$$

OSS. Il risultato è falso nei reali.

$P_2(x) = x^2+1$ non ha radici reali, ma ha radici complesse $z_1 = i$, $z_2 = -i$.