

DEF. Modulo di un numero complesso.

Se $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ($x, y \in \mathbb{R}$), definiamo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|2 - 3i| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

OSS $|z|$ è un numero reale, ≥ 0

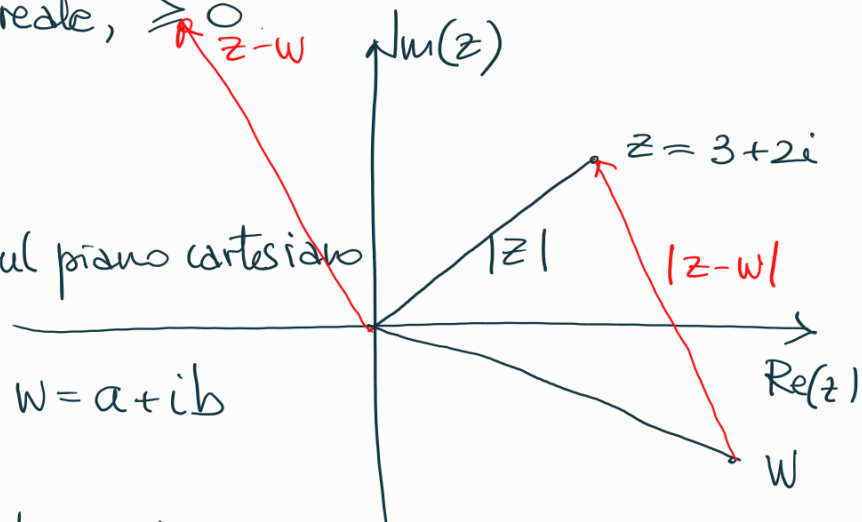
Interpretazione di $|z|$:

la distanza del punto z sul piano cartesiano dall'origine.

Se $z, w \in \mathbb{C}$. $z = x + iy$, $w = a + ib$

$$|z - w| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

si interpreta come la distanza tra i due punti z, w nel piano cartesiano



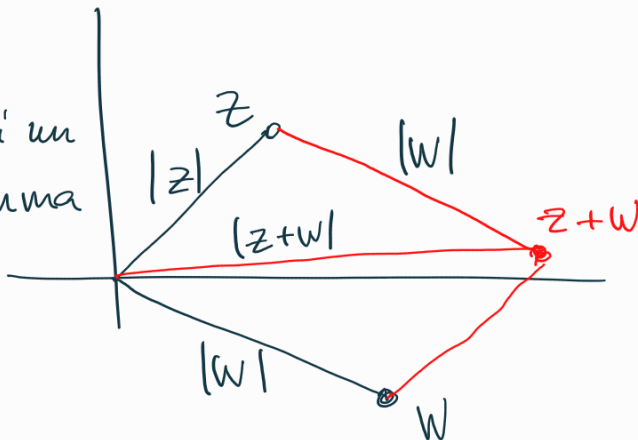
OSS se $z = x + i0 \in \mathbb{R}$, il suo modulo $|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$ coincide con il valore assoluto di x .

PROPRIETÀ del MODULO

- 1) $|z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$. (cioè $|z| \in \mathbb{R}, |z| \geq 0$)
- 2) $|z| = 0 \iff z = 0 \iff x = y = 0$
- 3) $|zw| = |z||w|$ *verifica facile.* $\forall z, w \in \mathbb{C}$
- 4) $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} \quad \forall z, w \in \mathbb{C} \text{ t.c. } w \neq 0$
- 5) $|z + w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$.
(dis. triangolare).

Interpretazione:

la lunghezza di un lato di un triangolo $\leq$ della somma degli altri due lati



OSS Nei reali si ha $|x|^2 = x^2$

Nei complessi è falso che $|z|^2 = z^2$

Esempio

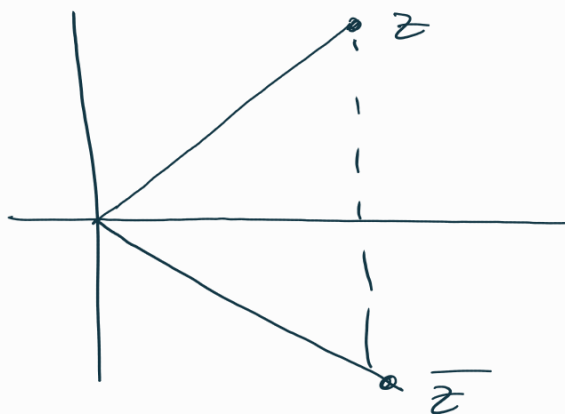
$$z = 1+i \quad |z|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$z^2 = (1+i)^2 = 1^2 + i^2 + 2 \cdot 1 \cdot i = 1 + \overset{4}{-1} + 2i = 2i$$

DEF Sia $z = x+iy \in \mathbb{C}$, si dice coniugato di z

il numero

$$\bar{z} = x-iy$$



Proprietà del coniugio.

$$1) \quad \overline{\bar{z}} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$2) \quad \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$$

infatti se $z = x+iy$, $w = a+ib$

$$z+w = (x+a) + i(y+b) \Rightarrow \overline{z+w} = (x+a) - i(y+b)$$

$$\bar{z} + \bar{w} = (x-iy) + (a-ib) =$$

$$3) \quad \overline{zw} = \overline{z} \overline{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

$$\begin{aligned} \overline{zw} &= \overline{(x+iy)(a+ib)} = \overline{(ax-by) + i(bx+ay)} = \\ &= ax-by - i(bx+ay) \end{aligned}$$

$$\overline{z} \overline{w} = (x-iy)(a-ib) = ax-by + i(-bx-ay)$$

$$4) \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}, w \neq 0.$$

$$5) \quad z \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$z \overline{z} = |z|^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$6) \quad \underline{\text{oss}} \quad z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$$

$$7) \quad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$\text{Esempio} \quad \frac{1}{3-2i} = \frac{3+2i}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3+2i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$$

Equazioni nei numeri complessi.

$$z + i (\overline{z})^2 = -2i \quad (*)$$

Scriviamo $z = x+iy$. Dobbiamo trovare tutte le coppie (x, y) di reali che verificano (*).

(*) diventa

$$\begin{aligned} x+iy + i(x-iy)^2 &= -2i \\ x+iy + i(x^2 - y^2 - 2ixy) &= -2i \end{aligned}$$

$$x + iy + i(x^2 - y^2) + 2xy = -2i.$$

Eguagliando separatamente parte reale e parte immaginaria

$$\begin{cases} x + 2xy = 0 \\ y + x^2 - y^2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(1+2y) = 0 \\ x^2 - y^2 + y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x=0) \vee (y=-\frac{1}{2})$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{cases}$$

$\vee$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 = 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x^2 + \frac{5}{4} = 0 \end{cases}$$

non ha
soluzioni reali

nessuna soluzione

Soluzioni

$$\boxed{\begin{matrix} z = -i \\ z = 2i \end{matrix}}$$

$$z + \bar{z} - 3|z| = z^2 + |z|$$

$$(x+iy)^2$$

pongo $z = x + iy$
 $x, y \in \mathbb{R}$

$$\cancel{x+iy} + \cancel{x-iy} - 3y = x^2 - y^2 + 2ixy + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cancel{2xy} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ -3y = -y^2 + |y| \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2x = x^2 + |x| \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < 0 \\ y^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

$y=0$ accettabile
 $y=4$ accettabile

$$\boxed{z=0} \vee \boxed{z=4i}$$

$y=0$ non acc.
 $y=2$ acc.

$x=0$ acc.

$x=1$ acc.

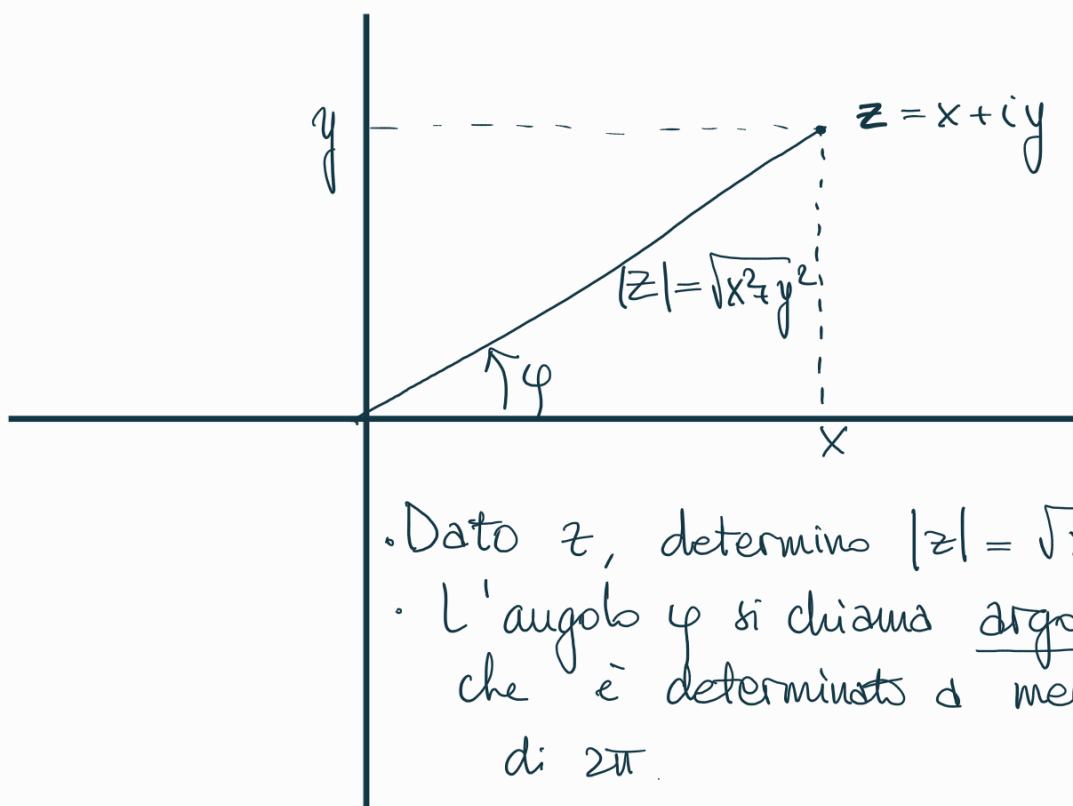
$x=0$ non acc.

$x=3$

$z=0$ (già vista)
 $\boxed{z=1}$

L'eq^{ue} ha 3 soluzioni.

Rappresentazione trigonometrica, o polare, dei complessi:



- Dato z , determino $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- L'angolo φ si chiama argomento di z che è determinato a meno di multipli di 2π .

Passaggio dalla rapp. cartesiana alla polare e viceversa.

$$z = x + iy.$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e per } \varphi? \quad \text{--- } \varphi \text{ è indeterminato se } |z|=0$$

$$\begin{cases} x = |z| \cos \varphi \\ y = |z| \sin \varphi \end{cases}$$

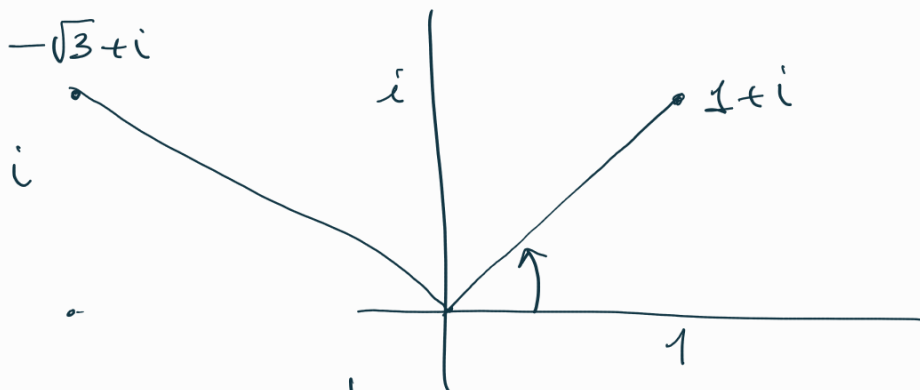
$$(*) \begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{|z|} \\ \sin \varphi = \frac{y}{|z|} \end{cases}$$

$$\boxed{z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)}$$

Esempio.

$$z = 1 + i$$

$$|z| = \sqrt{2}$$



$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z = -\sqrt{3} + i$$

$$|z| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\varphi = \cancel{\arcsin \frac{1}{2}} \quad \pi - \arcsin \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (\text{vero!})$$

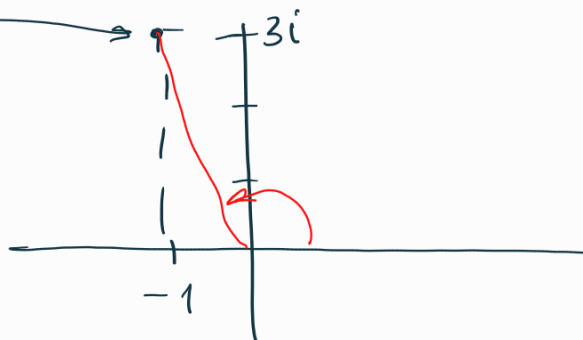
$$\varphi = \cancel{\arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} \quad \pi + \arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi - \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$z = -1 + 3i$$

$$|z| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

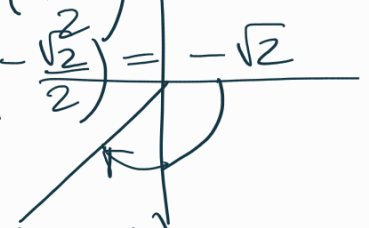
$$\cos \varphi = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$

$$\sin \varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$$



$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \pi - \arctan 3$$

Come si passa (al contrario) da polari a cartesiane

$$\left. \begin{array}{l} |z| = 2 \\ \arg z = \varphi = -\frac{3}{4}\pi \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = |z| \cos \varphi = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} \\ y = |z| \sin \varphi = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} \end{array}$$


$$\boxed{z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} = -\sqrt{2} (1+i)$$

Proviamo a moltiplicare due complessi usando coordinate polari.

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$w = |w| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$zw = |z||w| \left(\underbrace{[\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta]}_{\cos(\varphi + \theta)} + i \underbrace{[\cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta]}_{\sin(\varphi + \theta)} \right)$$

$$= |z||w| (\cos(\varphi + \theta) + i \sin(\varphi + \theta)).$$

$\Rightarrow zw$ ha per modulo $|z||w|$ (infatti il prodotto dei moduli) $|zw| = |z||w|$

e ha per argomento la somma degli argomenti.

TEOREMA

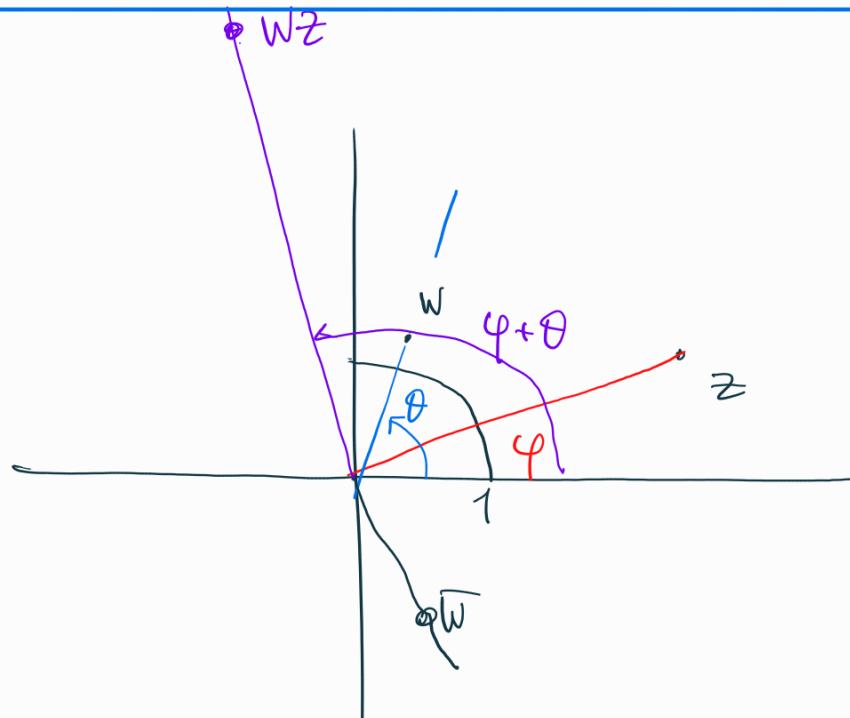
- 1) Facendo il prodotto di due numeri complessi, i moduli si moltiplicano, gli argomenti si sommano

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi + \theta) + i \sin(\varphi + \theta))$$

$$\text{se } z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi), w = |w|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

- 2) Facendo il rapporto di due numeri complessi, i moduli si dividono, gli argomenti si sottraggono.

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi - \theta) + i \sin(\varphi - \theta))$$



$$w = |w|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

$$\frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{\bar{w}}{|w|^2}$$

$\Downarrow$

$$\left| \frac{1}{w} \right| = \frac{1}{|w|}$$

$$\arg\left(\frac{1}{w}\right) = -\arg w.$$

$$\Rightarrow \frac{z}{w} = |z| \left| \frac{1}{w} \right| (\cos(\varphi - \theta) + i \sin(\varphi - \theta)) = \frac{|z|}{|w|} (\cos(\varphi - \theta) + i \sin(\varphi - \theta))$$

