

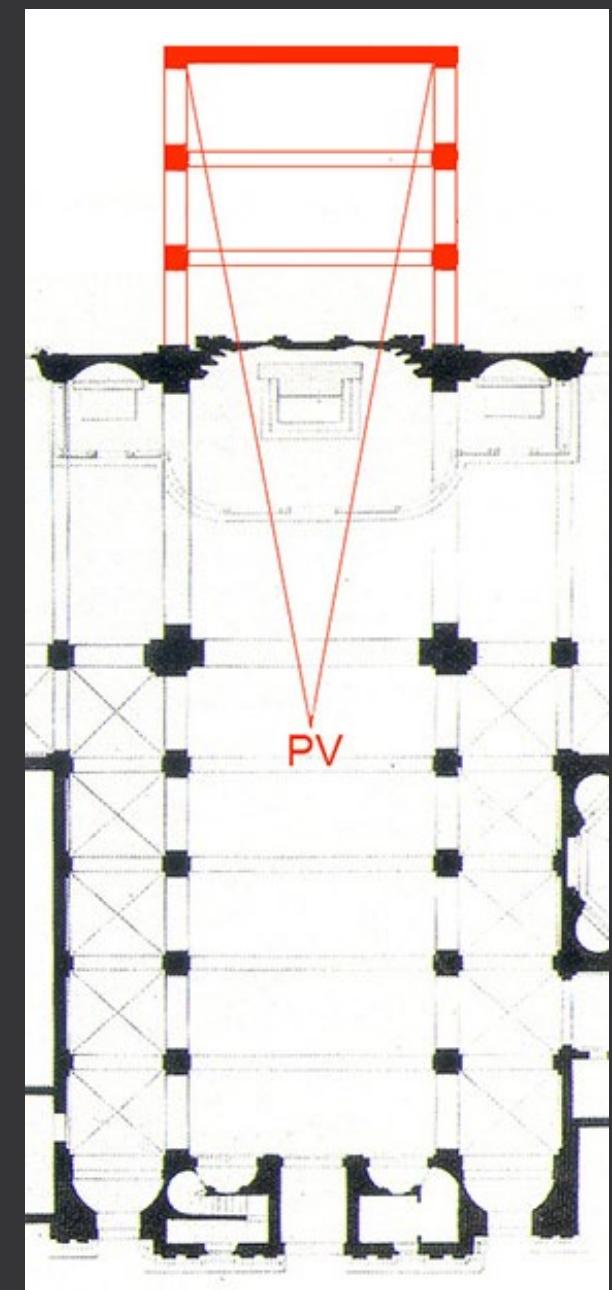
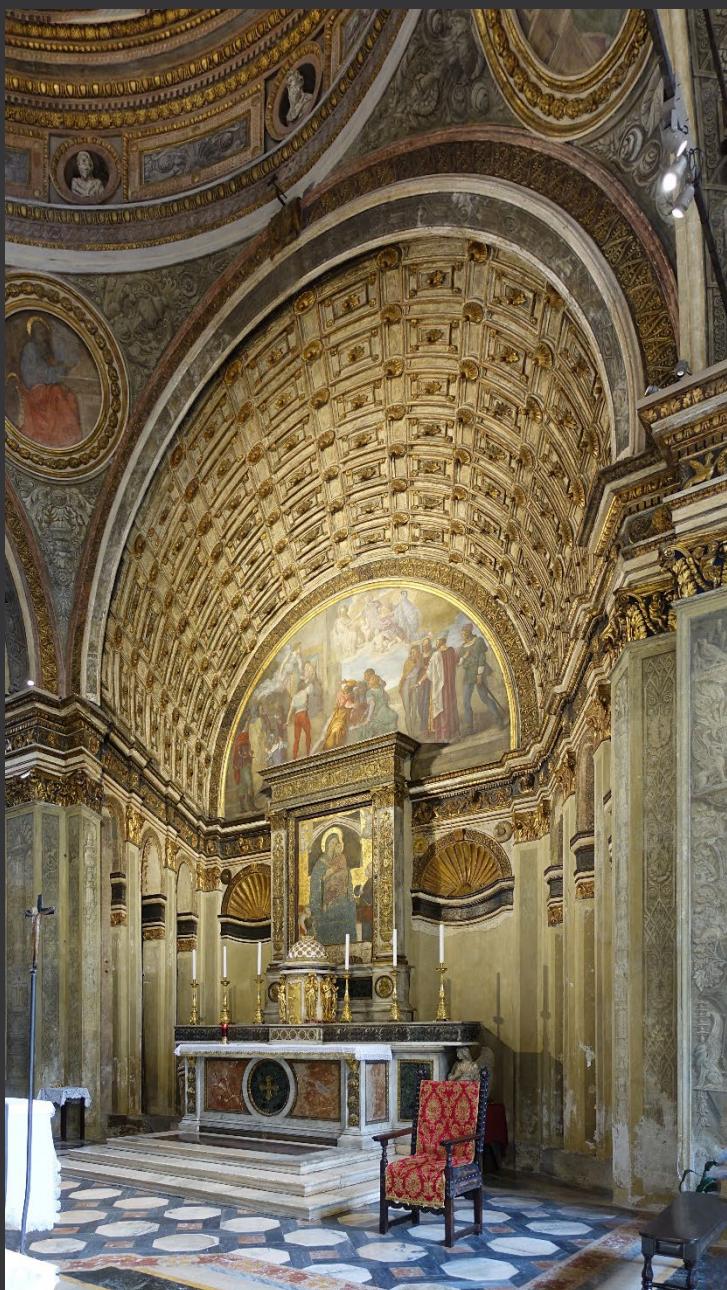
Concetti di prospettiva solida e trasformazioni proiettive della sfera

SAPIENZA Università di Roma – CdL in Scienze dell'Architettura - Corso di Fondamenti e Applicazioni di Geometria Descrittiva Canale 1 | A.A. 2025-2026

Prof. Leonardo Baglioni



Un esempio illustre di prospettiva solida: il finto coro della chiesa di S. Maria presso San Satiro ad opera di Donato Bramante (1482-1486)



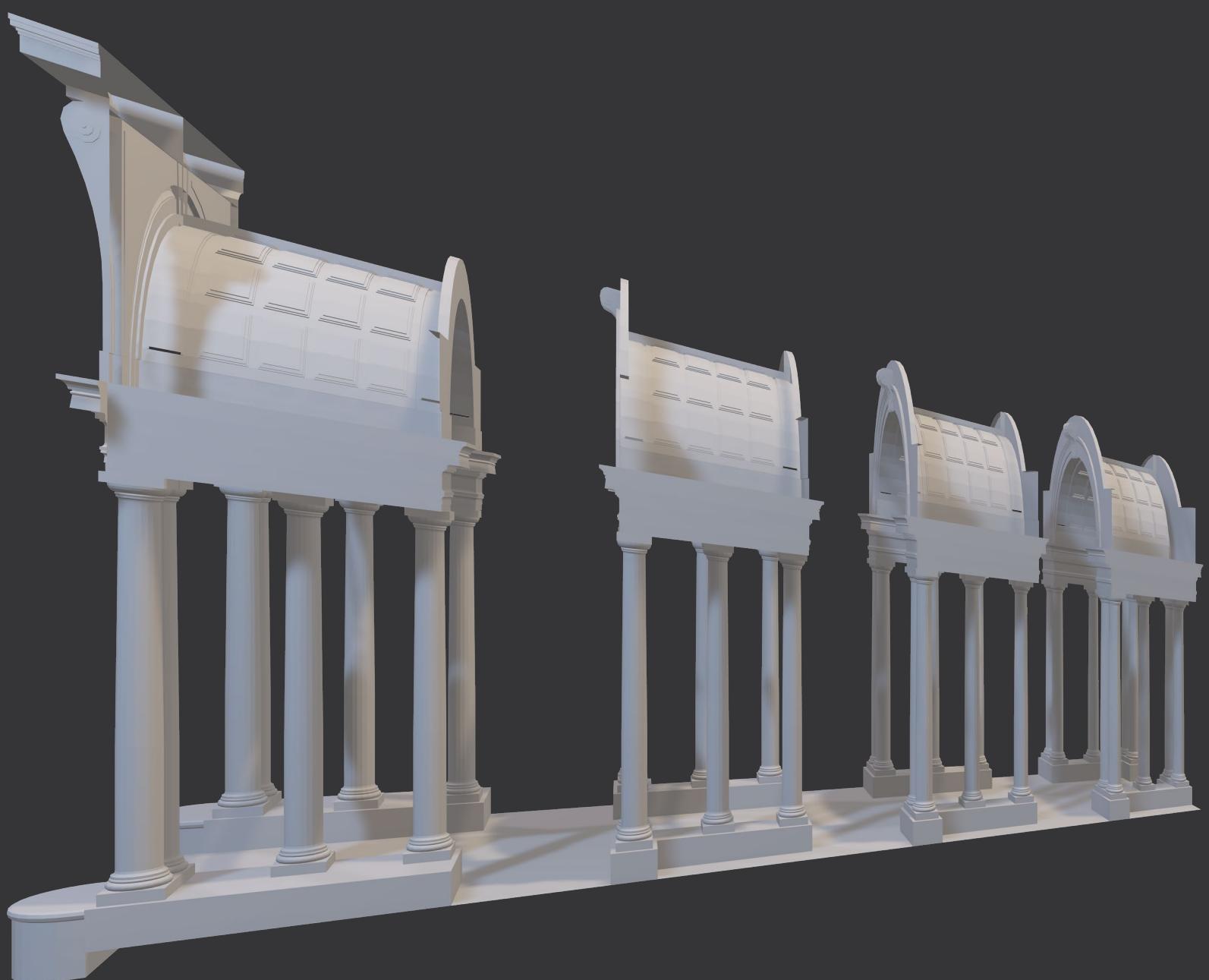
Un esempio illustre di prospettiva solida: il finto coro della chiesa di S. Maria presso San Satiro ad opera di Donato Bramante (1482-1486)



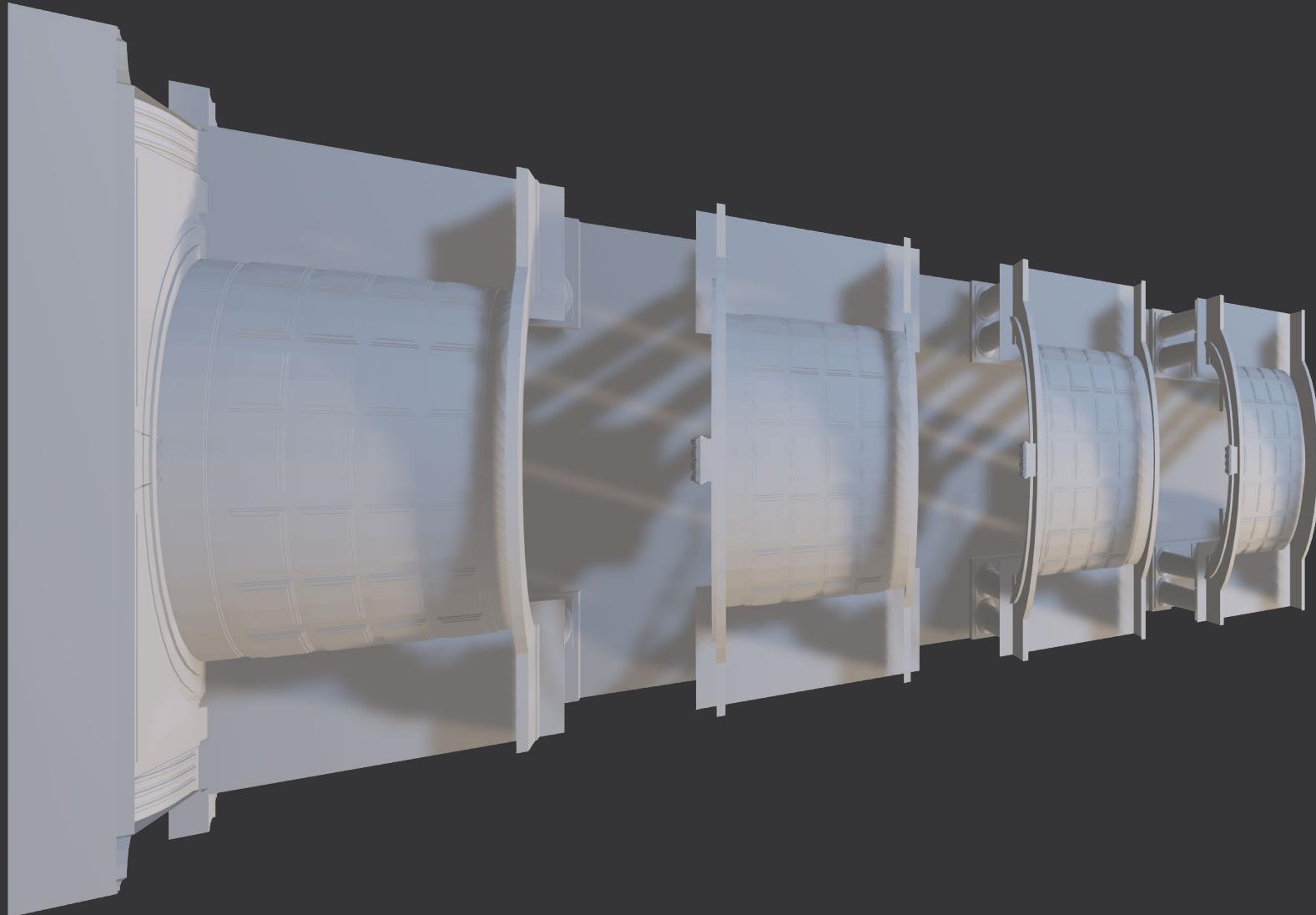
Un esempio illustre di prospettiva solida: la Galleria Spada ad opera di Francesco Borromini (1652)



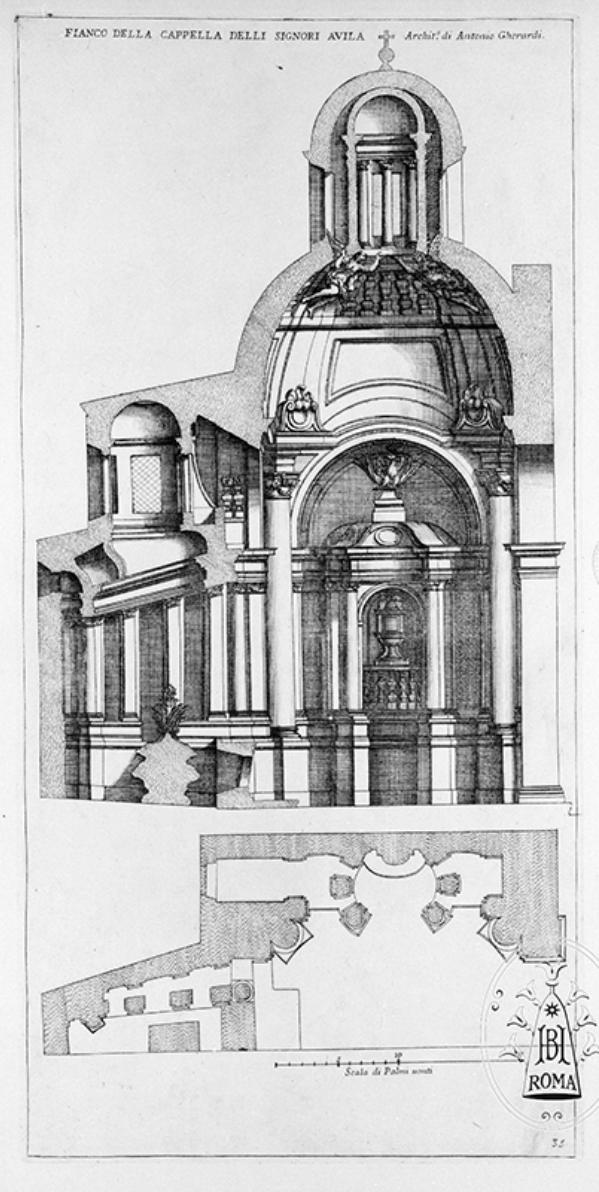
Un esempio illustre di prospettiva solida: la Galleria Spada ad opera di Francesco Borromini (1652)



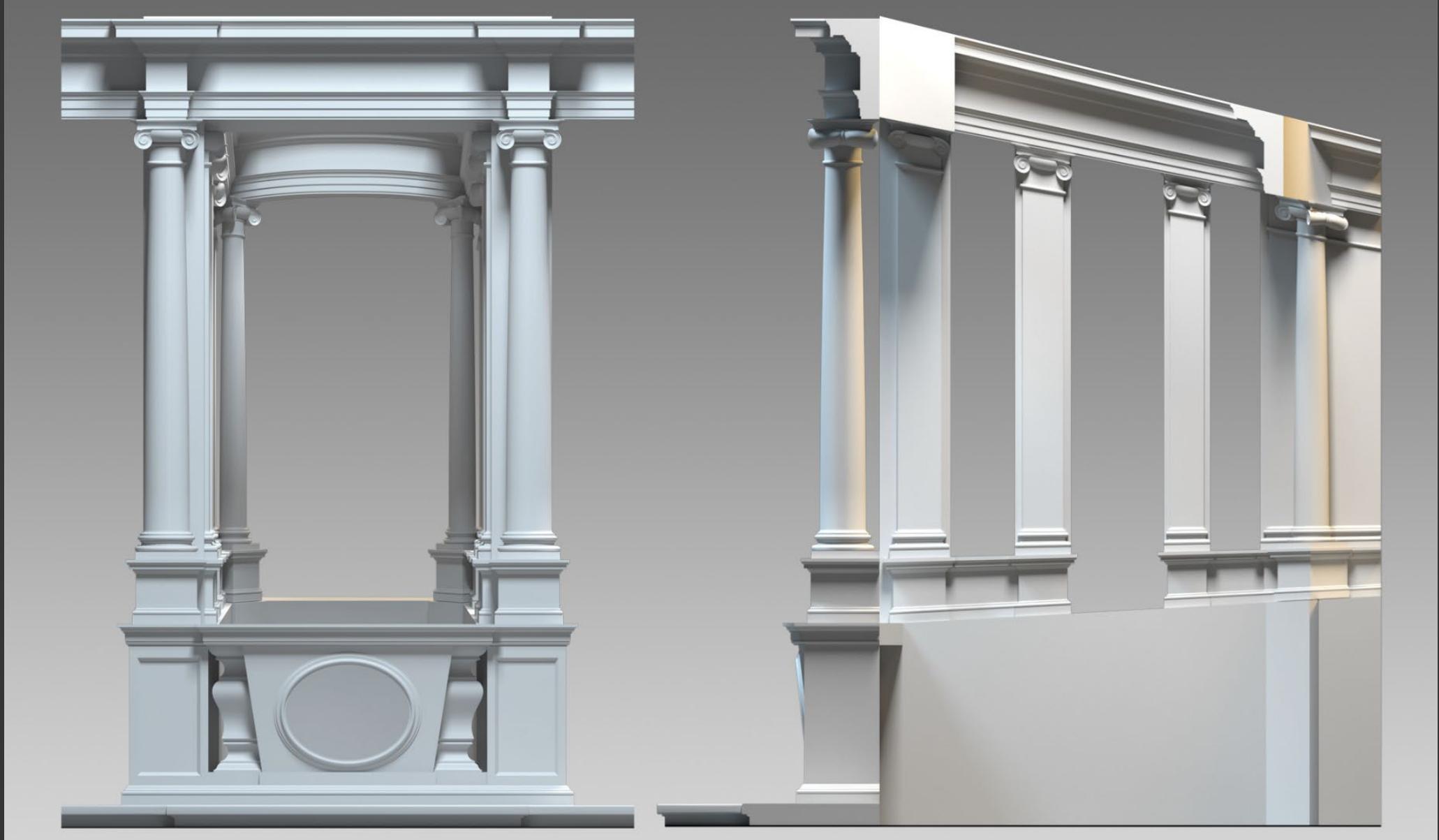
Un esempio illustre di prospettiva solida: la Galleria Spada ad opera di Francesco Borromini (1652)



Un esempio illustre di prospettiva solida: la Galleria Spada ad opera di Francesco Borromini (1652)

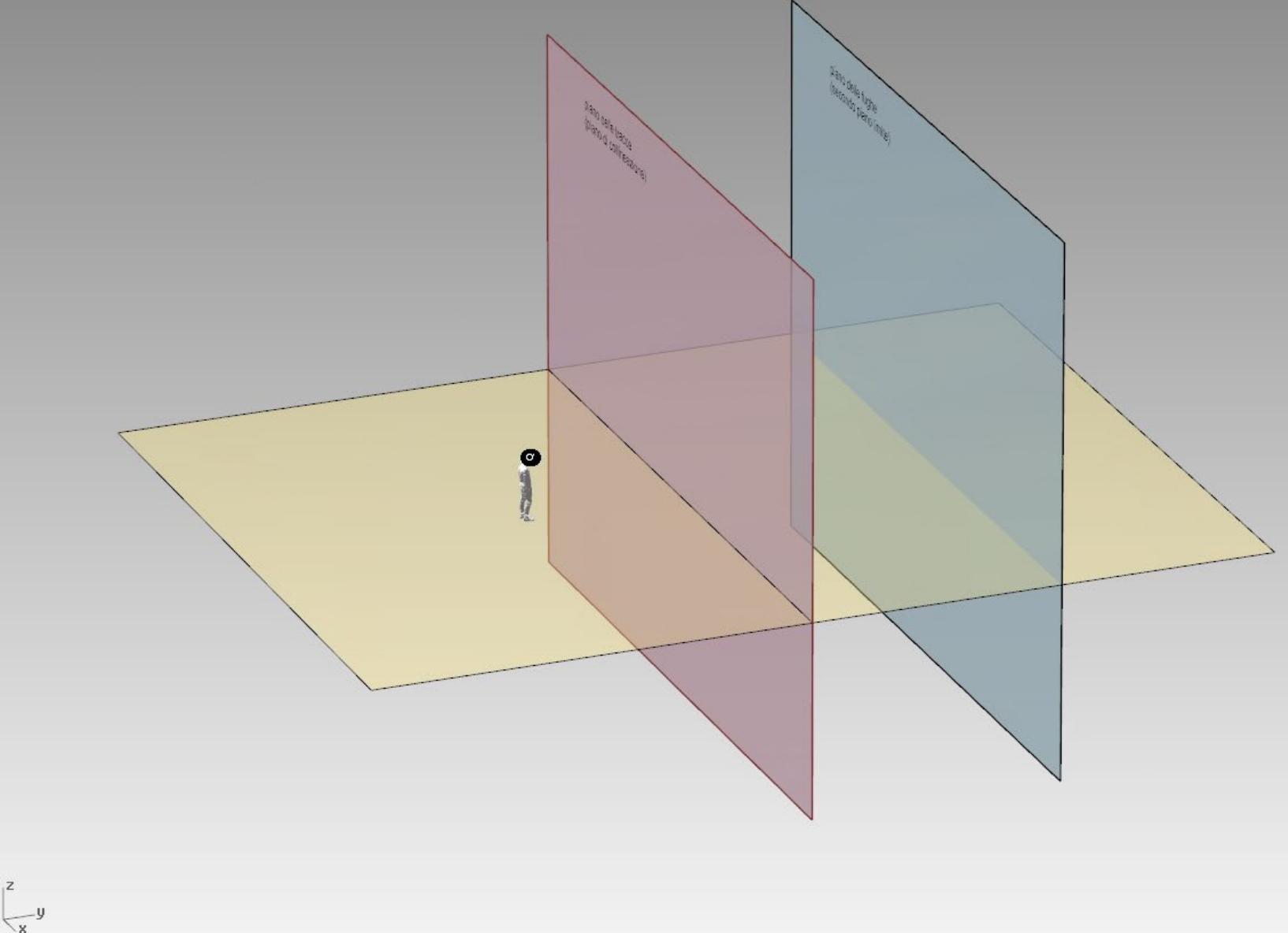


Un esempio meno conosciuto: la cappella Avila di Antonio Gherardi (1678)



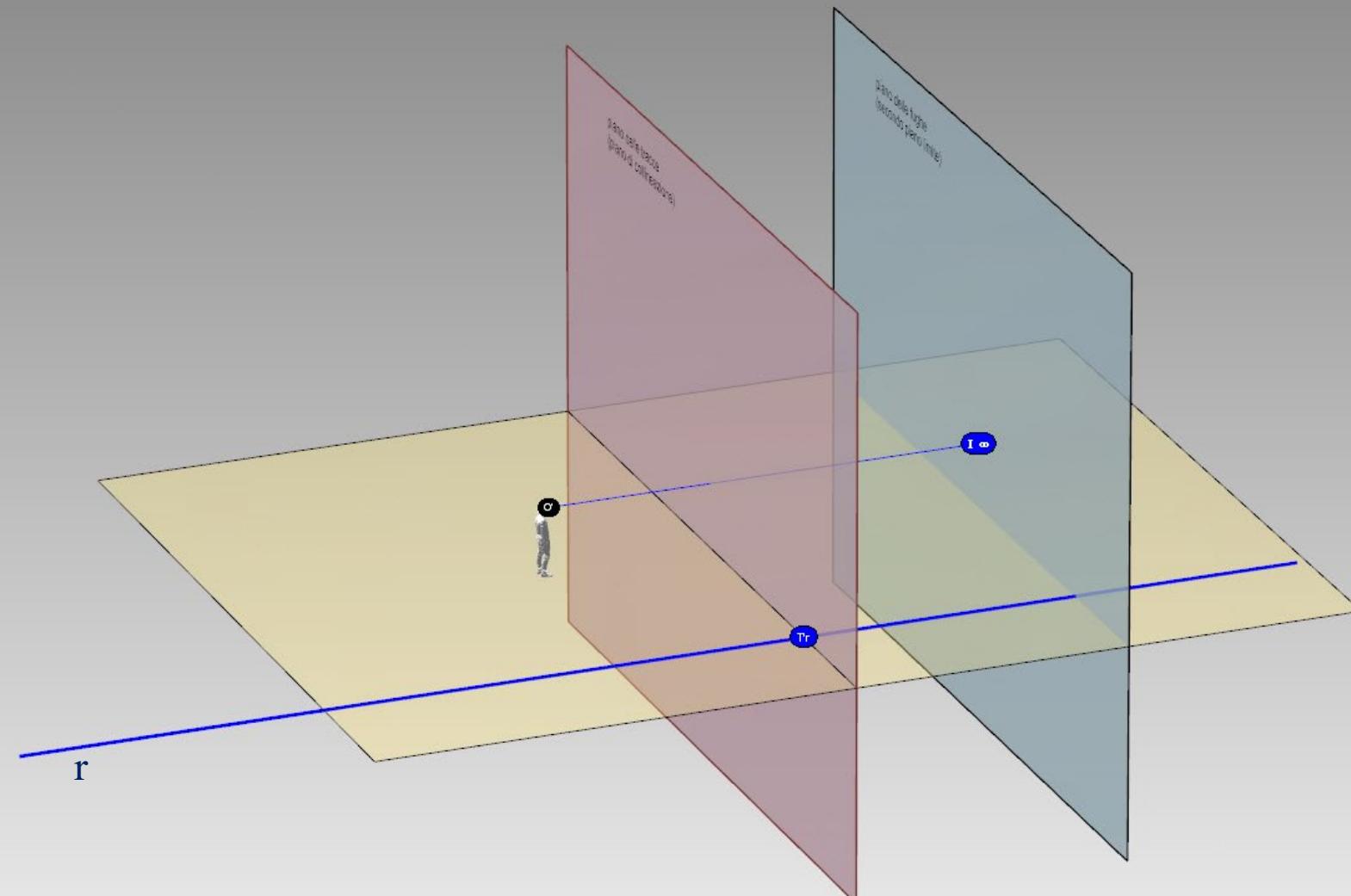
Un esempio meno conosciuto: la cappella Avila di Antonio Gherardi (1678)

Concetti proiettivi alla base
della prospettiva solida



Immaginiamo un centro di proiezione O' dal quale effettuare le consuete operazioni di proiezione e sezione. Questa volta però, la sezione non avverrà con un piano (il piano di quadro che siamo abituati ad utilizzare) bensì all'interno di uno spazio compreso tra due piani chiamati *piano delle fughe* (o, in un linguaggio proiettivo, *secondo piano limite*, in celeste nella figura) e *piano delle tracce* (o *piano di collineazione*, in rosa).

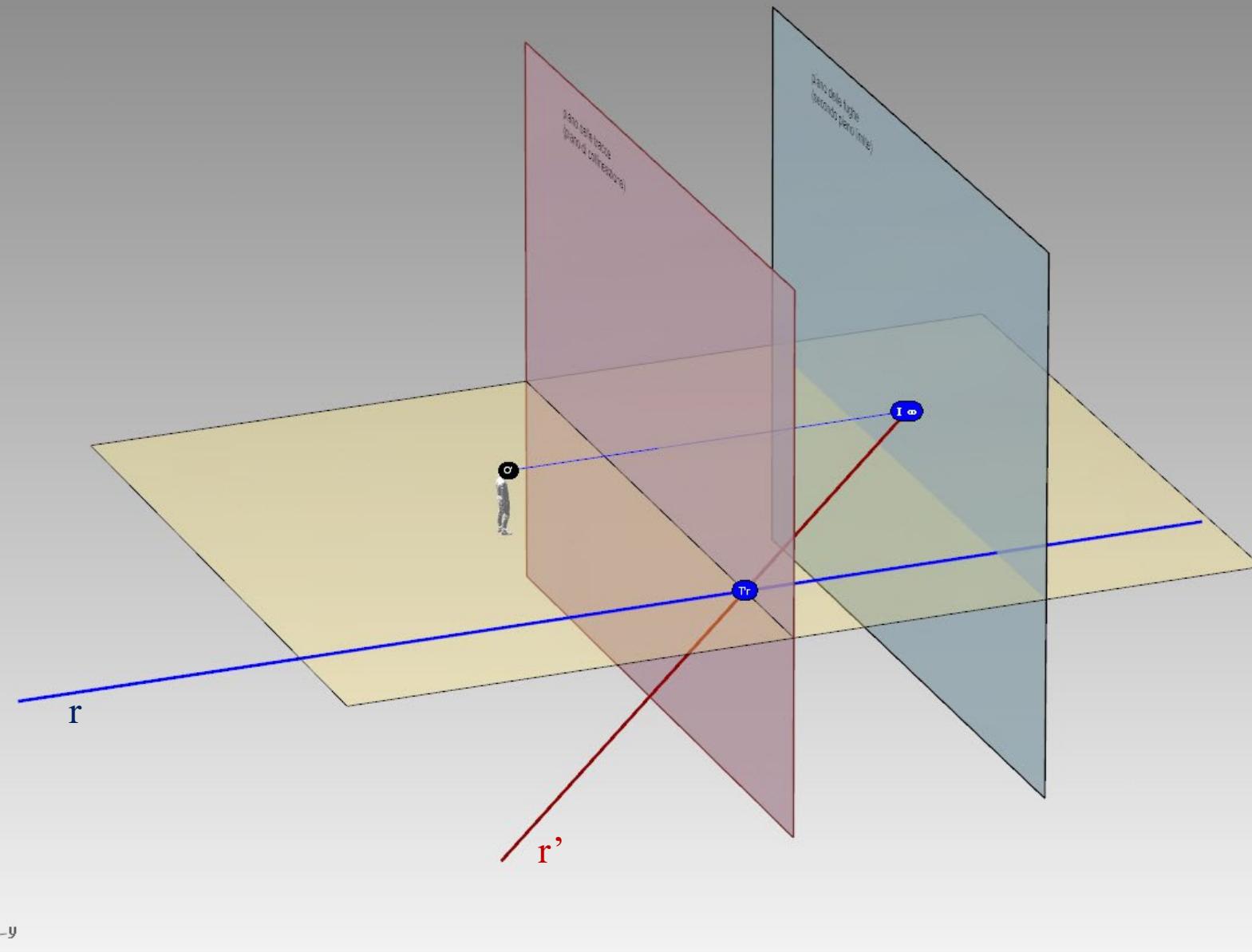
Questi elementi definiscono la prospettiva solida. Possiamo immaginare la prospettiva piana come un caso particolare di prospettiva solida nella quale i due piani delle tracce e delle fughe coincidono nel piano di quadro.



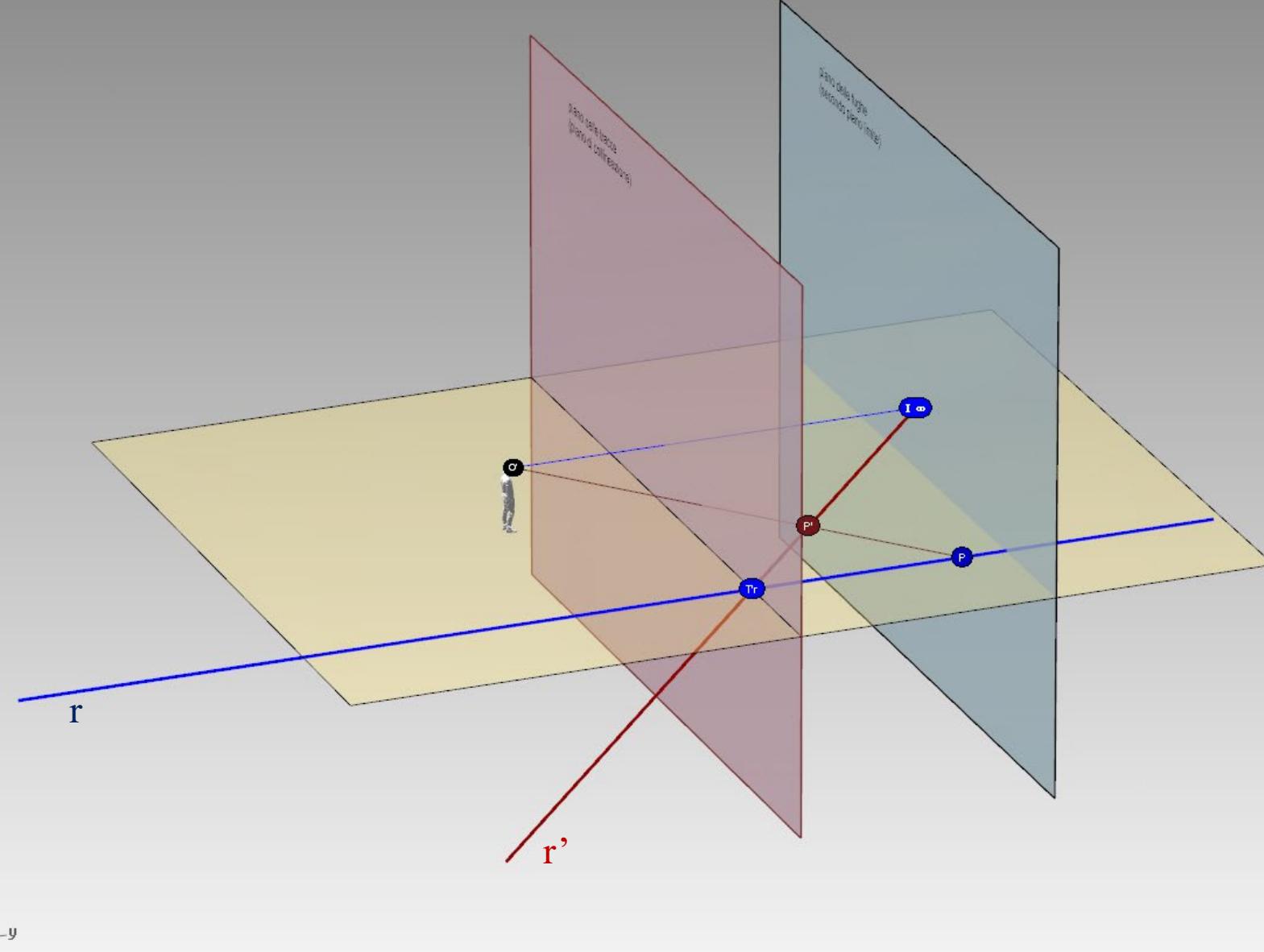
Per determinare la prospettiva solida di una retta r (in blu in figura) basterà determinare la sua fuga e la sua traccia.

L'immagine della direzione di r è il punto $I'r$ (che giace sul piano delle fughe) e si trova come al solito tracciando una retta proiettante (passante cioè per il centro di proiezione) parallela ad r .

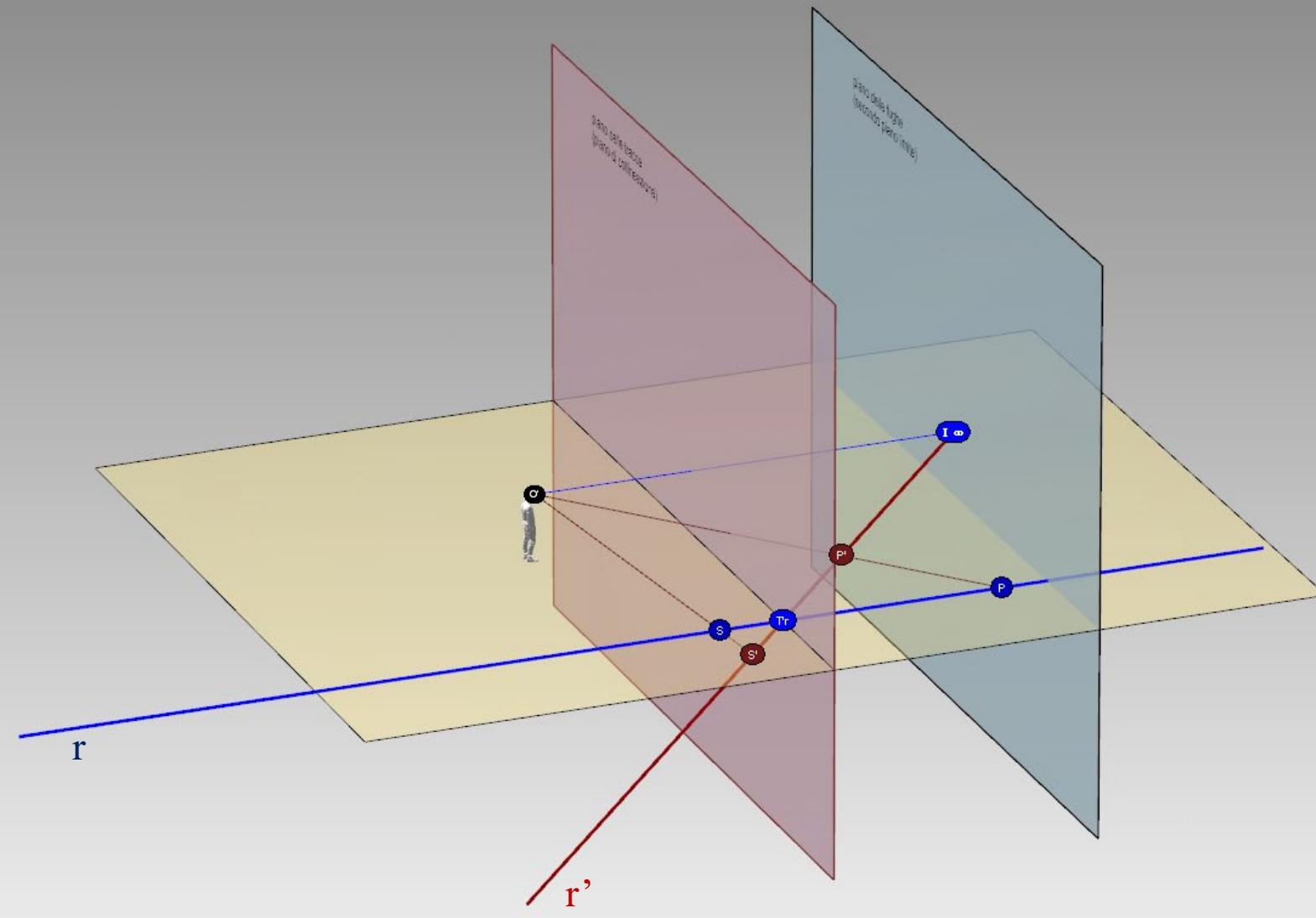
La traccia $T'r$ (che giace nel piano delle tracce) è l'intersezione di r con il piano delle tracce.



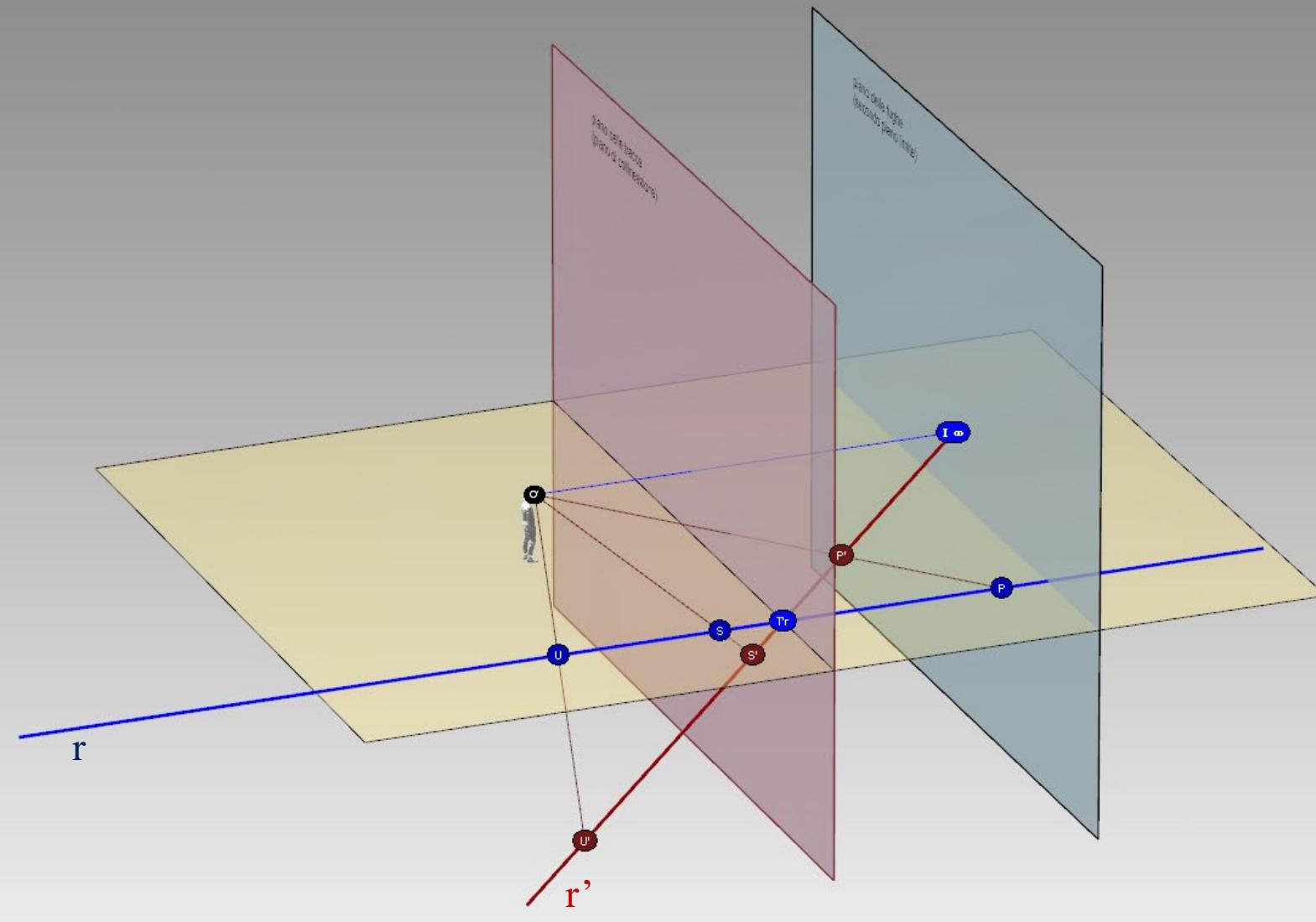
La prospettiva r' (in rosso) della retta r è quindi determinata.



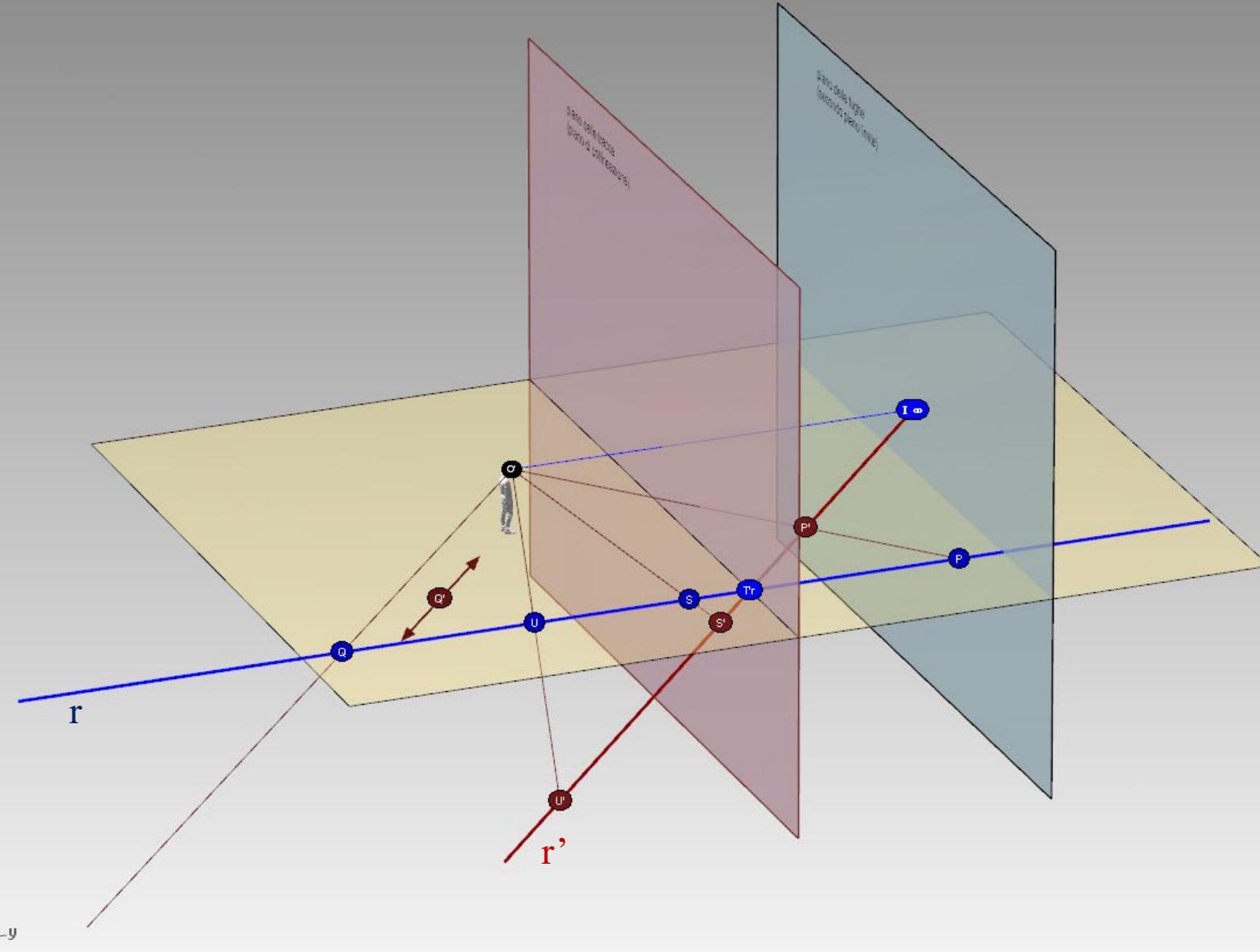
In ragione della corrispondenza biunivoca che abbiamo generato (in geometria proiettiva prende il nome di omologia solida) tra la retta oggettiva e la sua immagine (o prospettiva), ad un punto P della retta r corrisponderà un solo punto P' sulla prospettiva r' .



Allo stesso modo ad un punto S della retta r corrisponderà un solo punto S' sulla prospettiva r' .

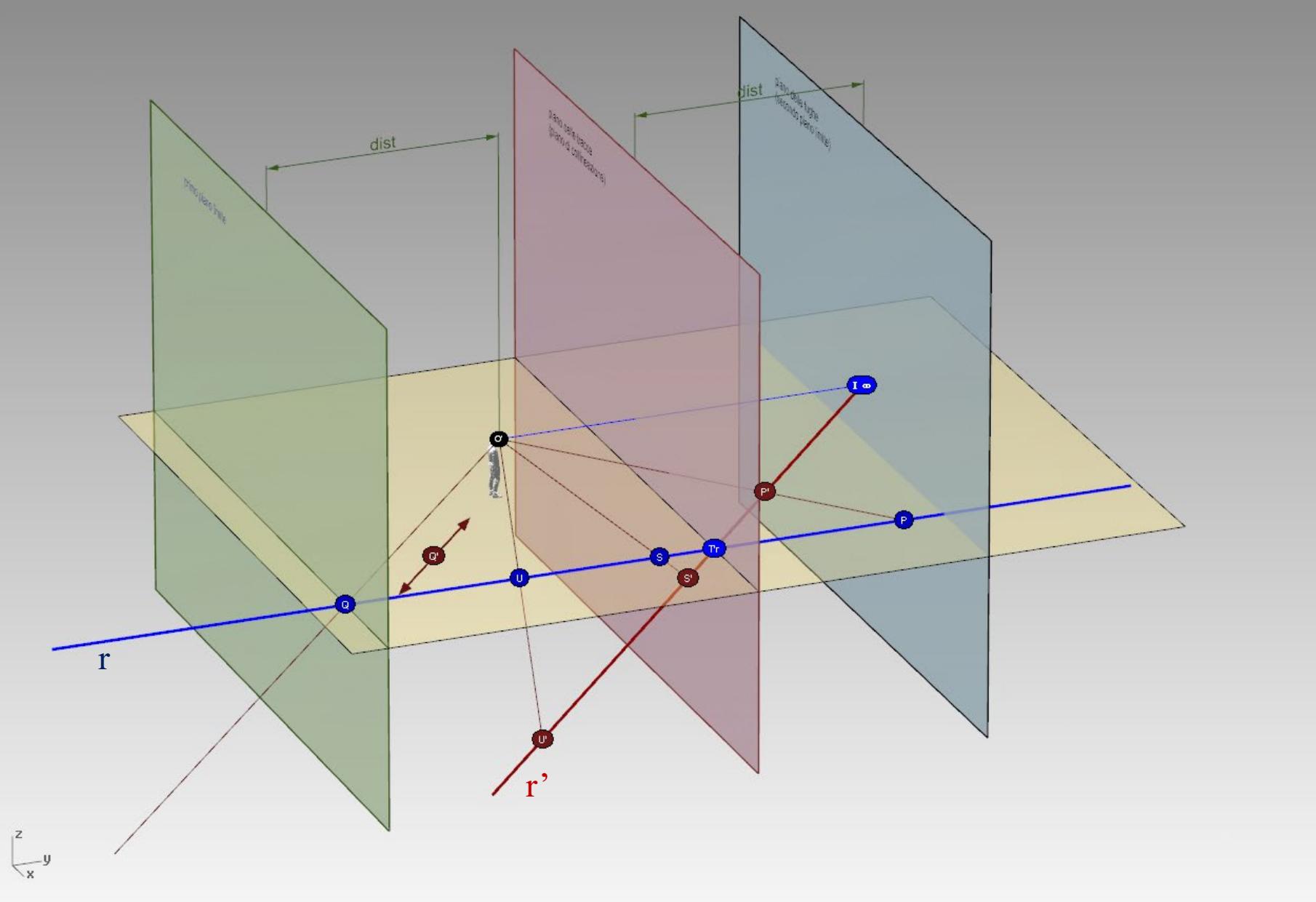


E ancora ad un punto U della retta r corrisponderà un solo punto U' sulla prospettiva r' .



Esisterà però un punto Q sulla retta r per il quale la retta proiettante diventa parallela alla prospettiva r' e la incontrerà nel punto Q' «all'infinito».

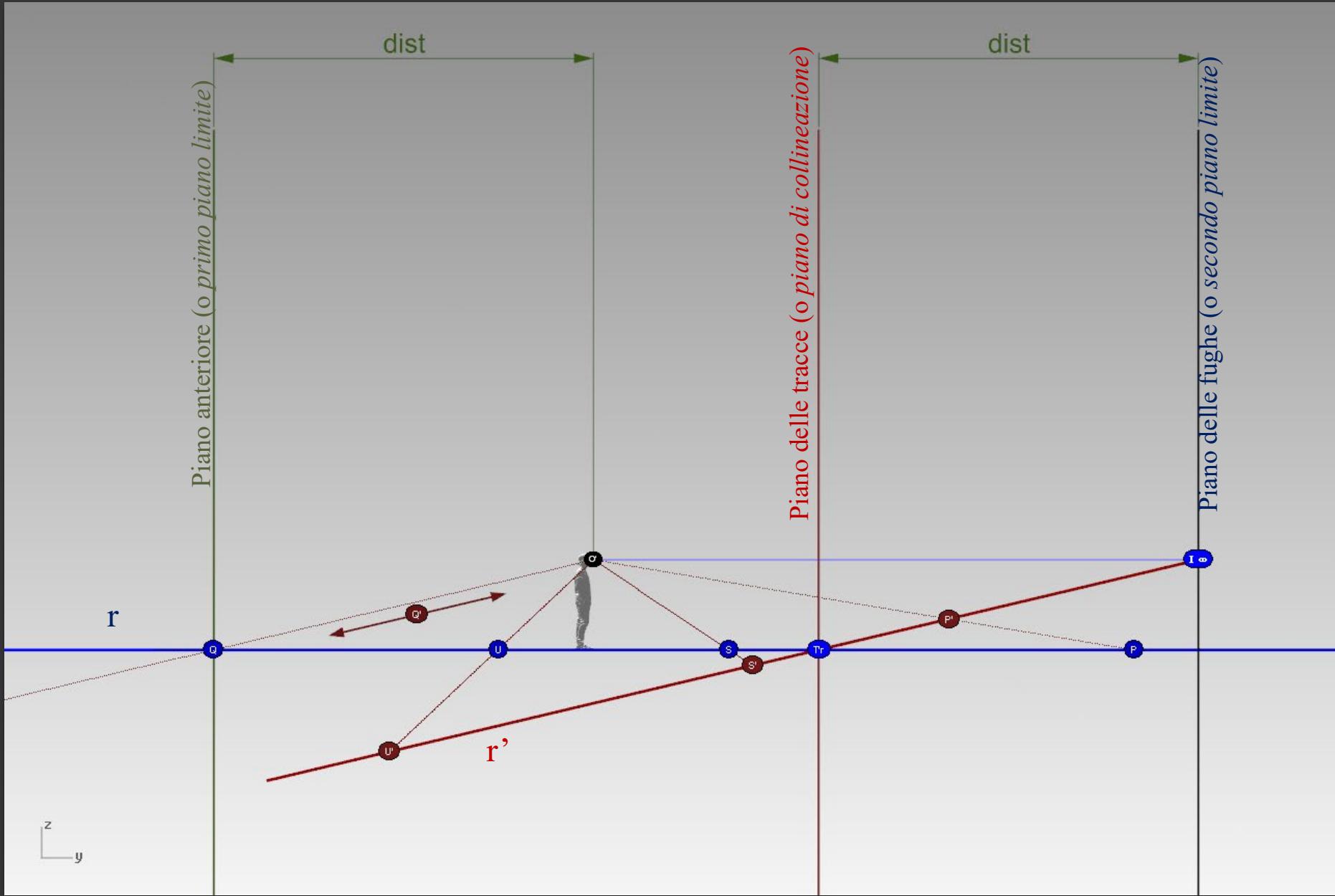
La prospettiva del punto Q diviene allora il punto all'infinito $Q'\infty$ (in figura indicato con un segmento orientato in due versi) o meglio, la prospettiva di Q è la direzione della prospettiva r' .



A ben vedere, il punto Q della retta r si trova su di un piano (in verde) parallelo ai piani delle tracce e delle fughe che dista da O' quanto il piano delle tracce dista dal piano delle fughe.

Questo piano prende il nome di *piano anteriore* o, in un linguaggio proiettivo, *primo piano limite*.

Ogni punto oggettivo che si trova su questo piano si proietta secondo punti impropri, in altre parole le prospettive dei punti oggettivi che appartengono al *primo piano limite* sono direzioni.

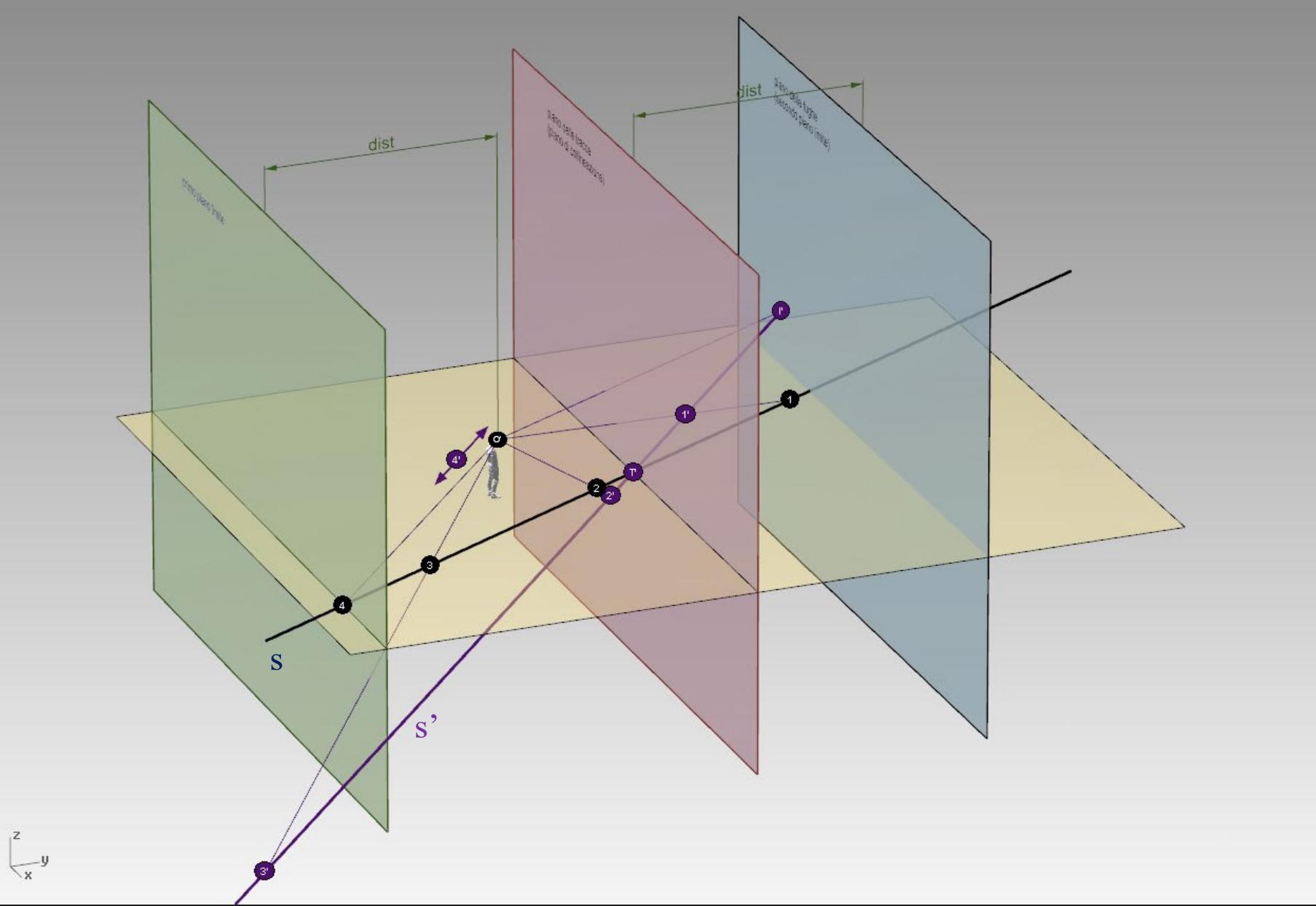


A ben vedere, il punto Q della retta r si trova su di un piano (in verde) parallelo ai piani delle tracce e delle fughe che dista da O' quanto il piano delle tracce dista dal piano delle fughe.

Questo piano prende il nome di *piano anteriore* o, in un linguaggio proiettivo, *primo piano limite*.

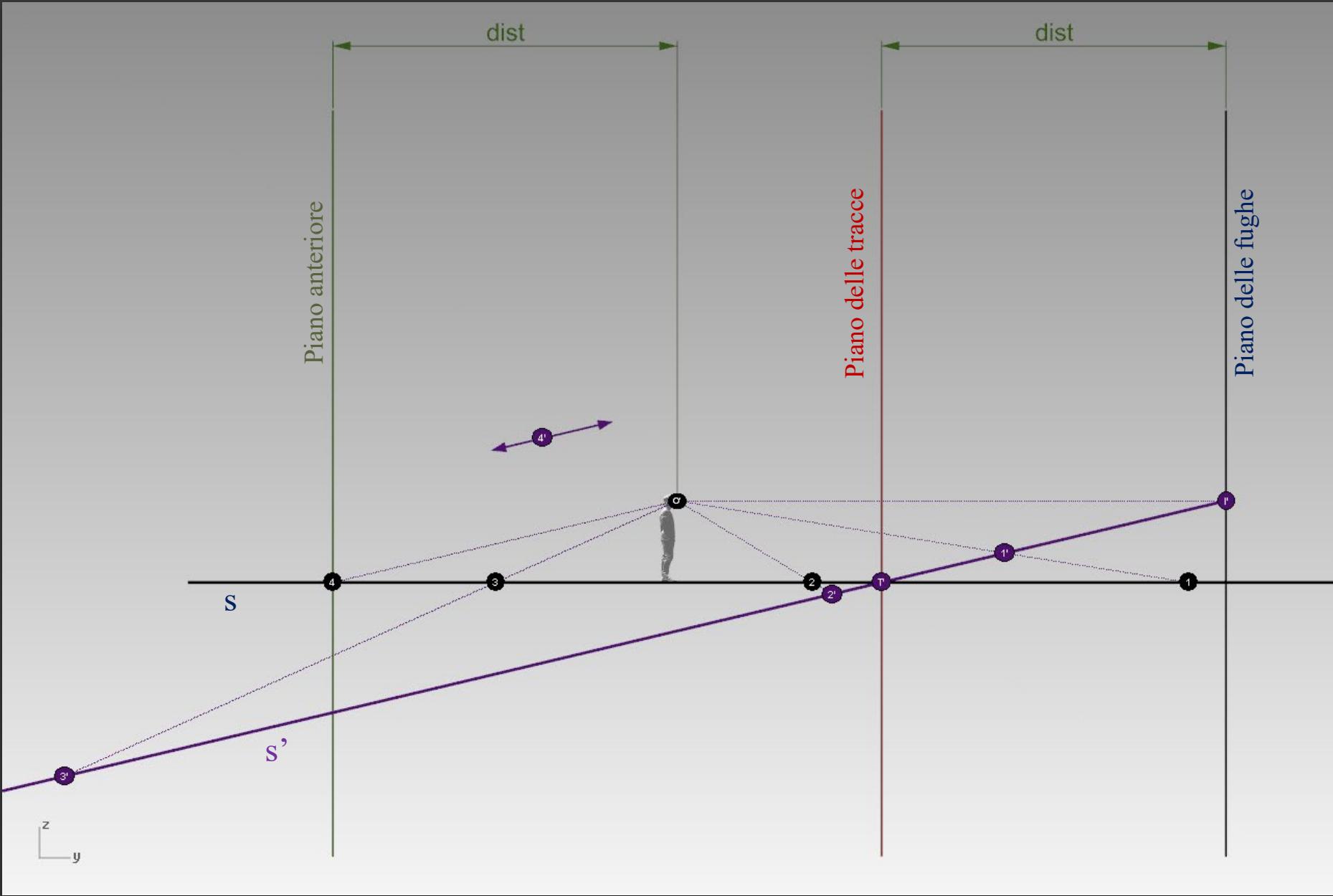
Ogni punto oggettivo che si trova su questo piano si proietta secondo punti impropri, in altre parole le prospettive dei punti oggettivi che appartengono al *primo piano limite* sono direzioni.

(vista frontale della configurazione precedente)



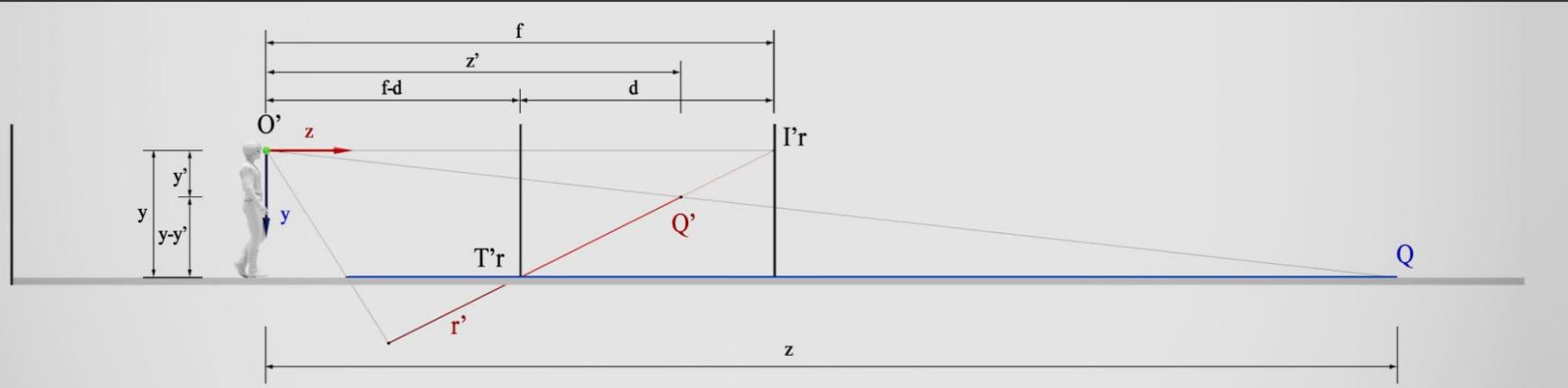
In figura è illustrata la costruzione della prospettiva solida di un'altra retta s (in nero).

Come sempre, ad ogni punto oggettivo della retta s corrisponde un unico punto immagine della prospettiva s' . Ma come detto precedentemente esisterà un punto (il punto 4) della retta s che appartiene anche al primo piano limite, per il quale la prospettiva è il punto all'infinito $4'\infty$, cioè la direzione della prospettiva s' . Infatti anche in questo caso la retta proiettante del punto 4 (cioè la retta $O'-4$) è parallela alla prospettiva s' , si incontrano cioè «all'infinito».



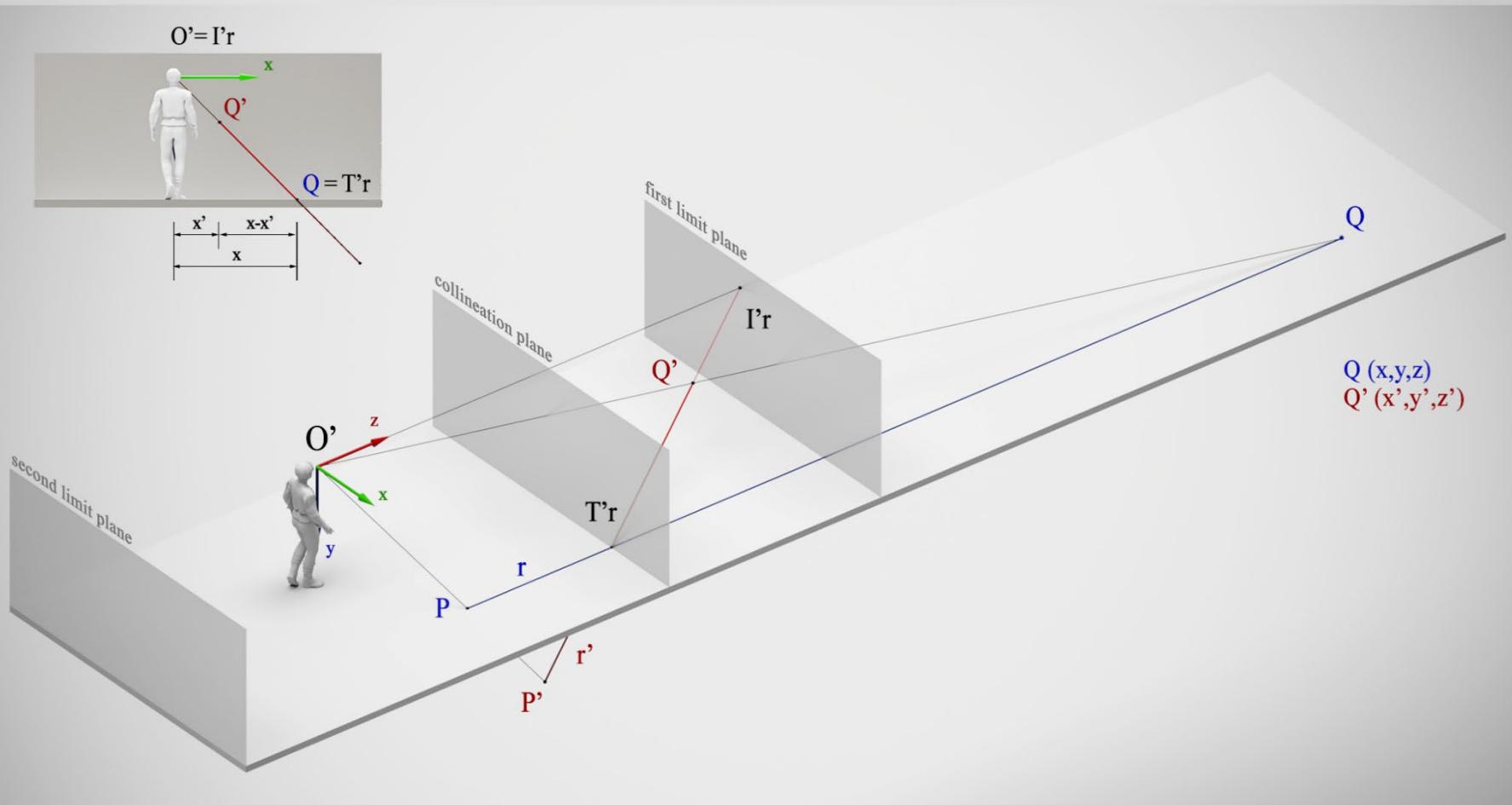
In figura è illustrata la costruzione della prospettiva solida di un'altra retta s (in nero).

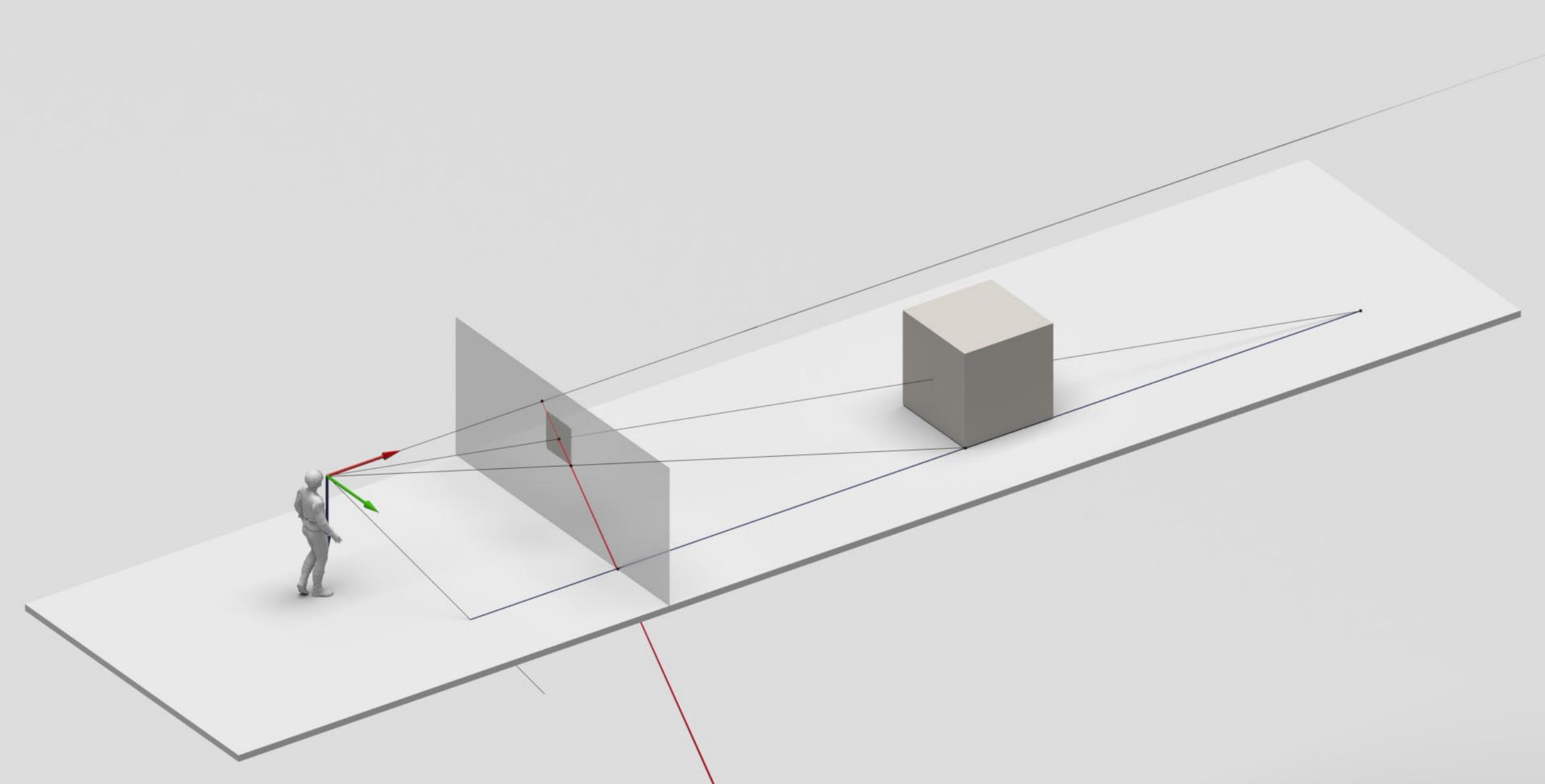
Come sempre, ad ogni punto oggettivo della retta s corrisponde un unico punto immagine della prospettiva s' . Ma come detto precedentemente esisterà un punto (il punto 4) della retta s che appartiene anche al primo piano limite, per il quale la prospettiva è il punto all'infinito $4'\infty$, cioè la direzione della prospettiva s' . Infatti anche in questo caso la retta proiettante del punto 4 (cioè la retta $O'-4$) è parallela alla prospettiva s' , si incontrano cioè «all'infinito».

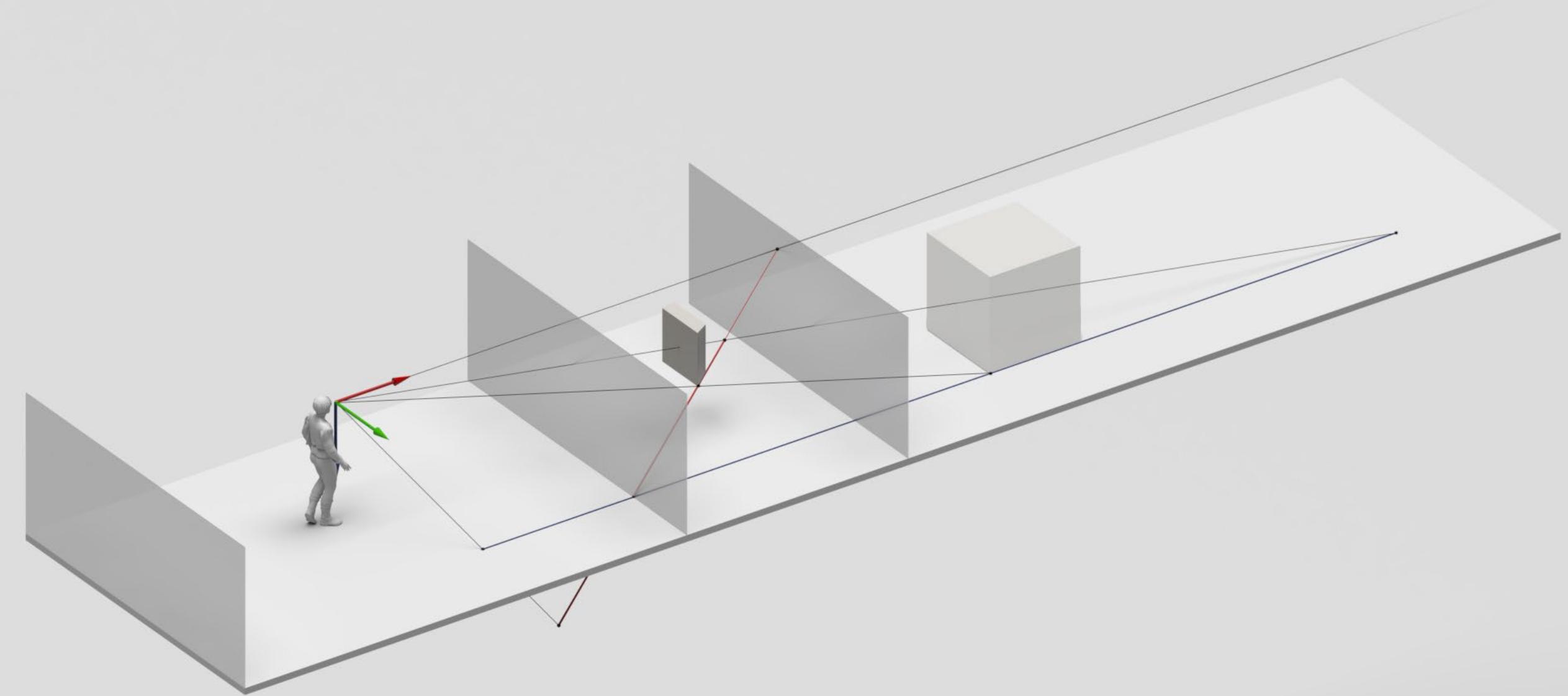


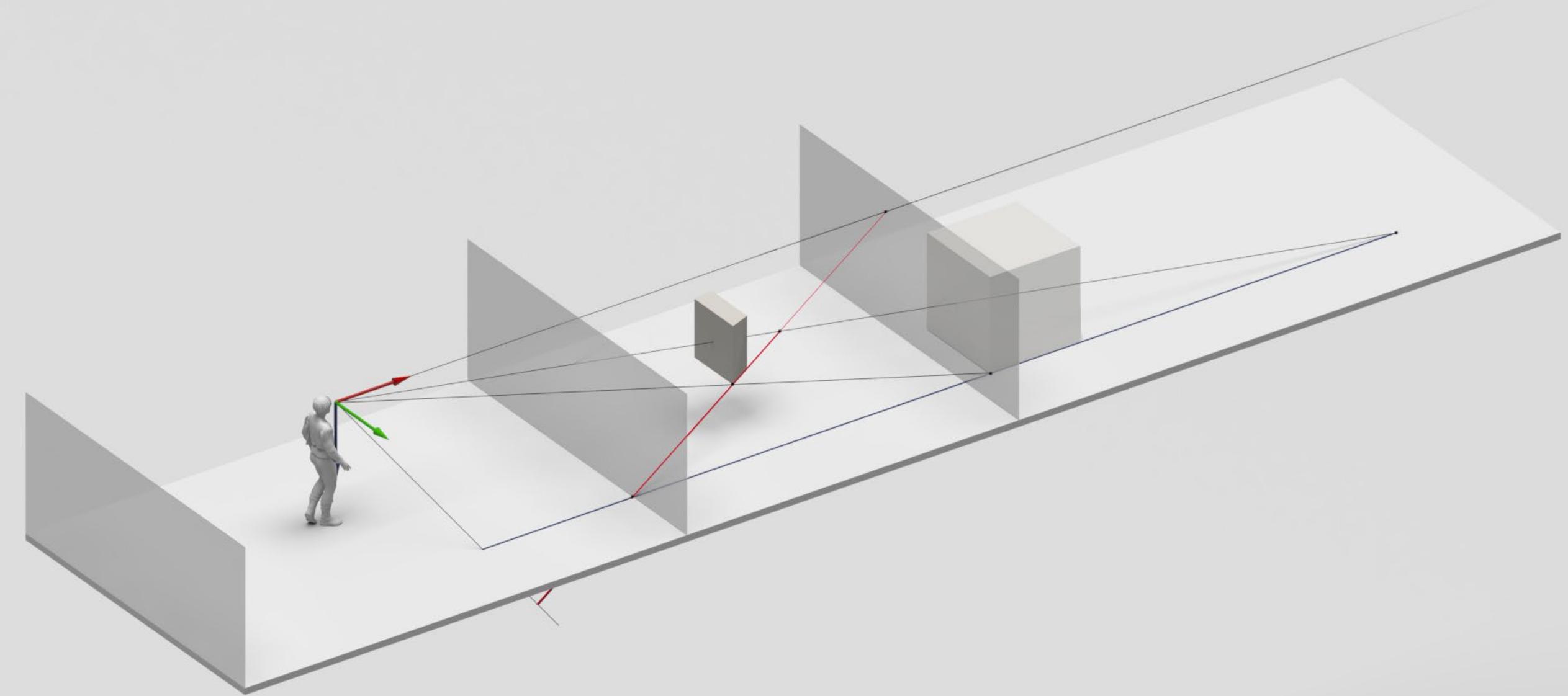
È possibile ricavare le relazioni che legano la corrispondenza biunivoca tra spazio proiettivo (la prospettiva solida) e lo spazio affine (la realtà).

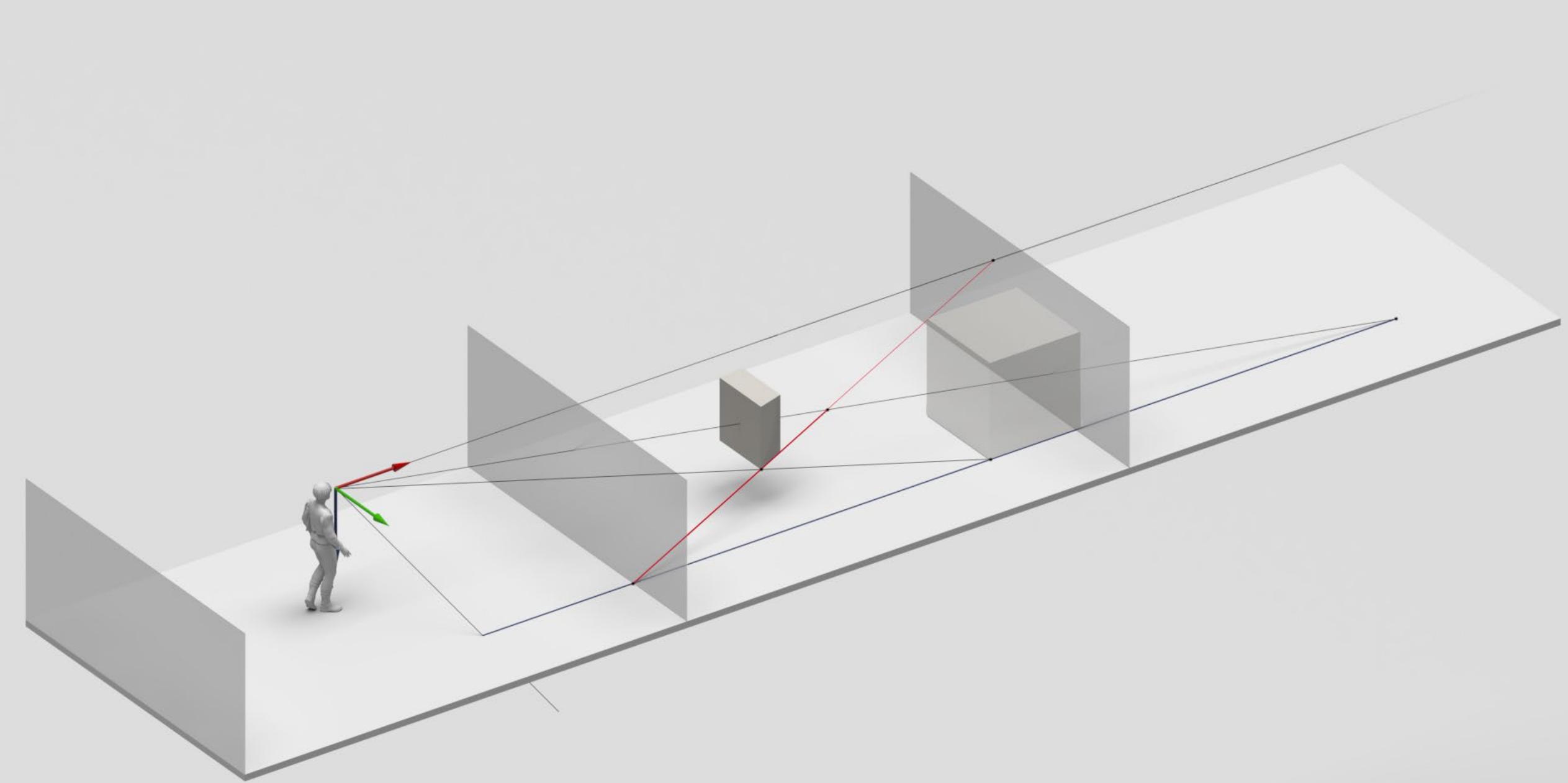
Queste relazioni, riferite ad un sistema di riferimento che ha origine nel centro di proiezione, possono essere implementate in un ambiente parametrico e simulare le infinite trasformazioni tra i due spazi.

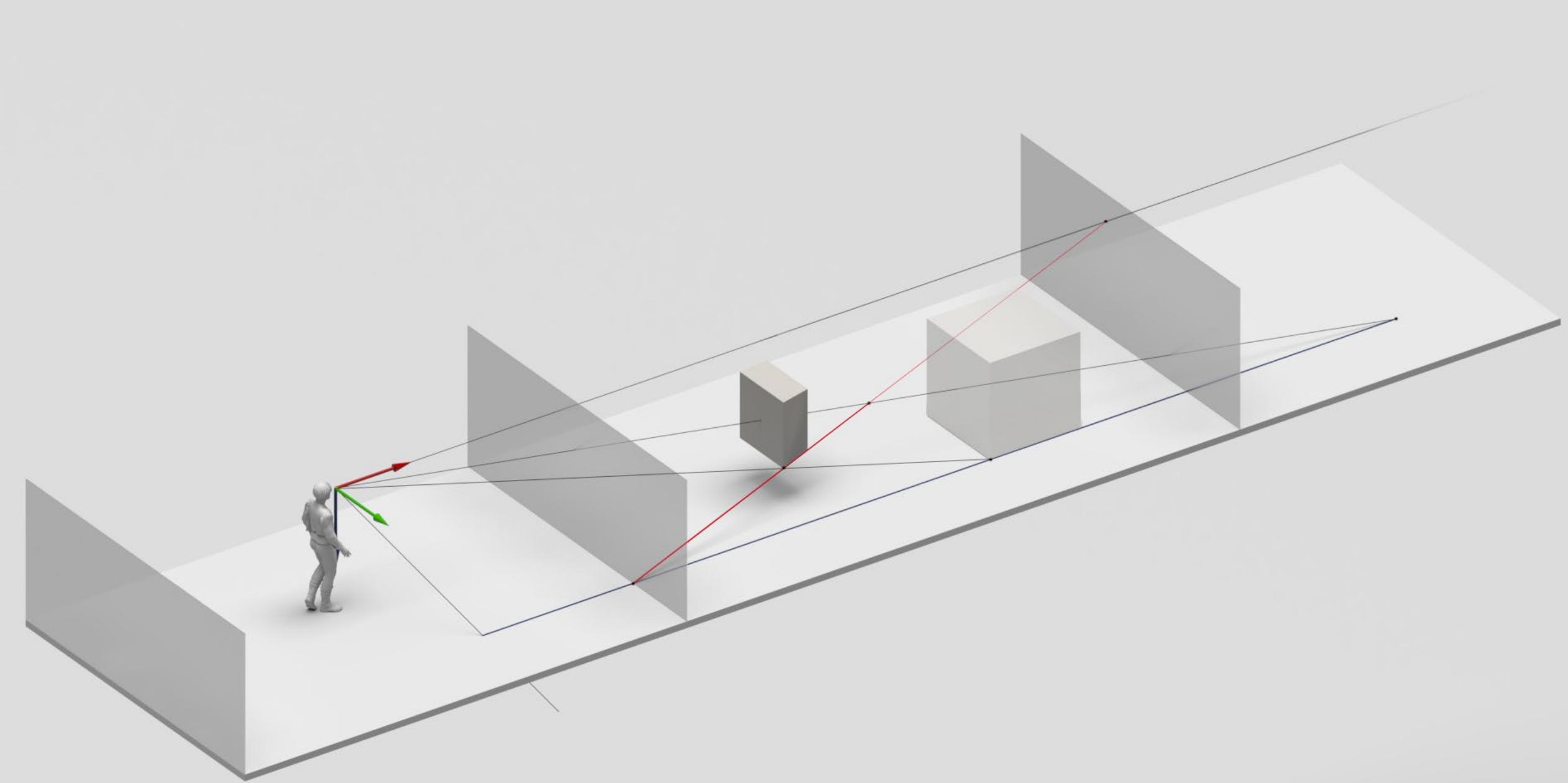


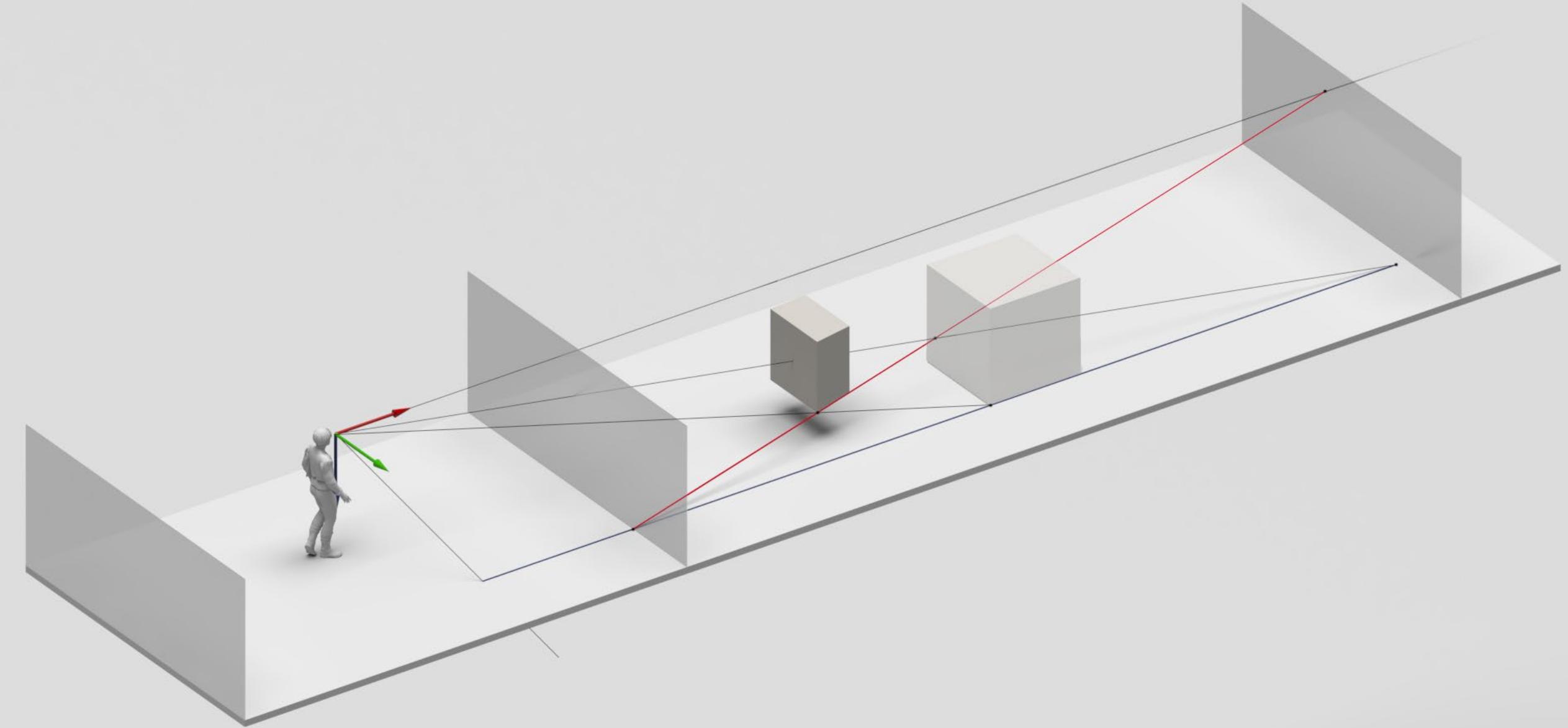


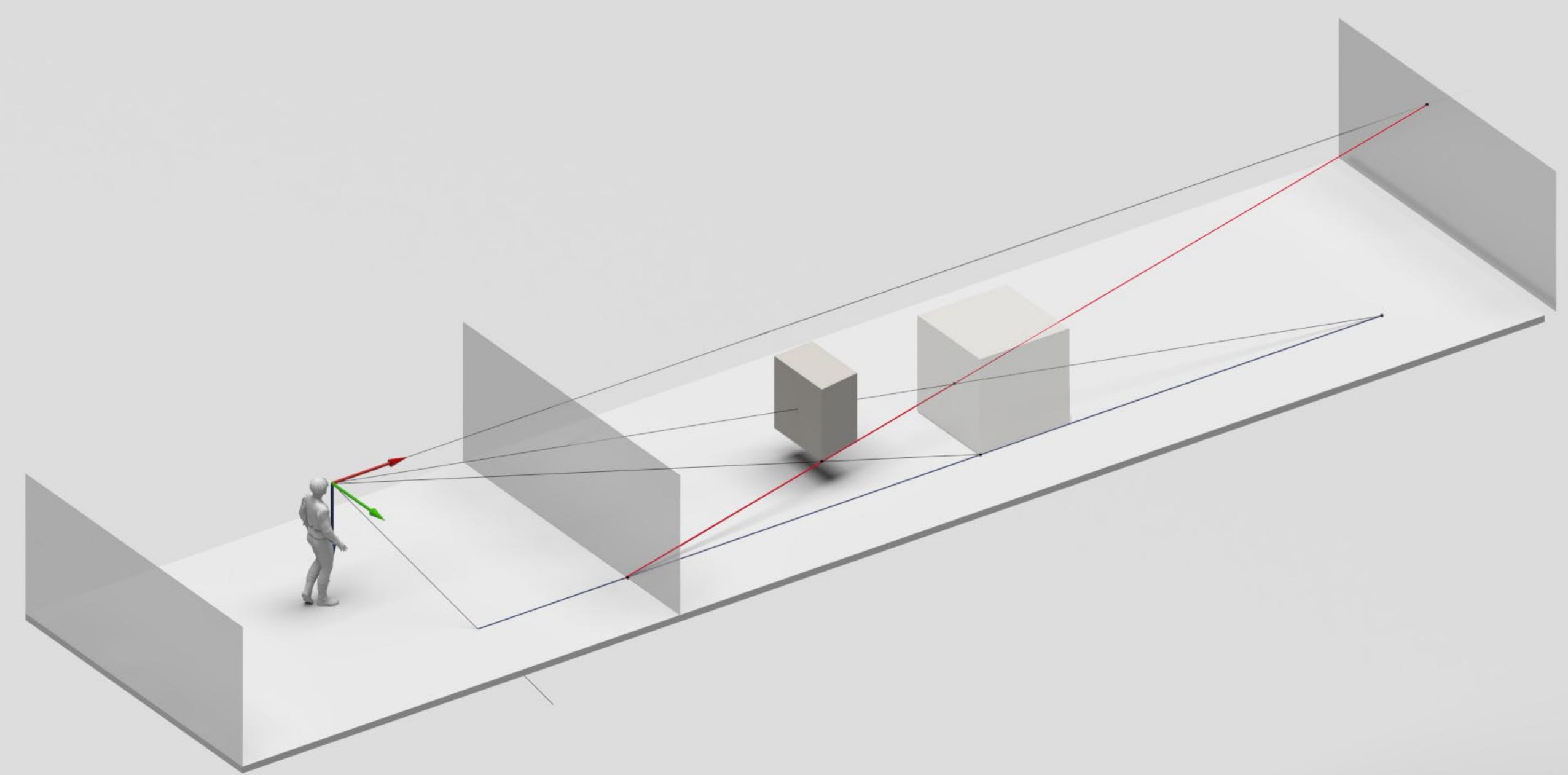


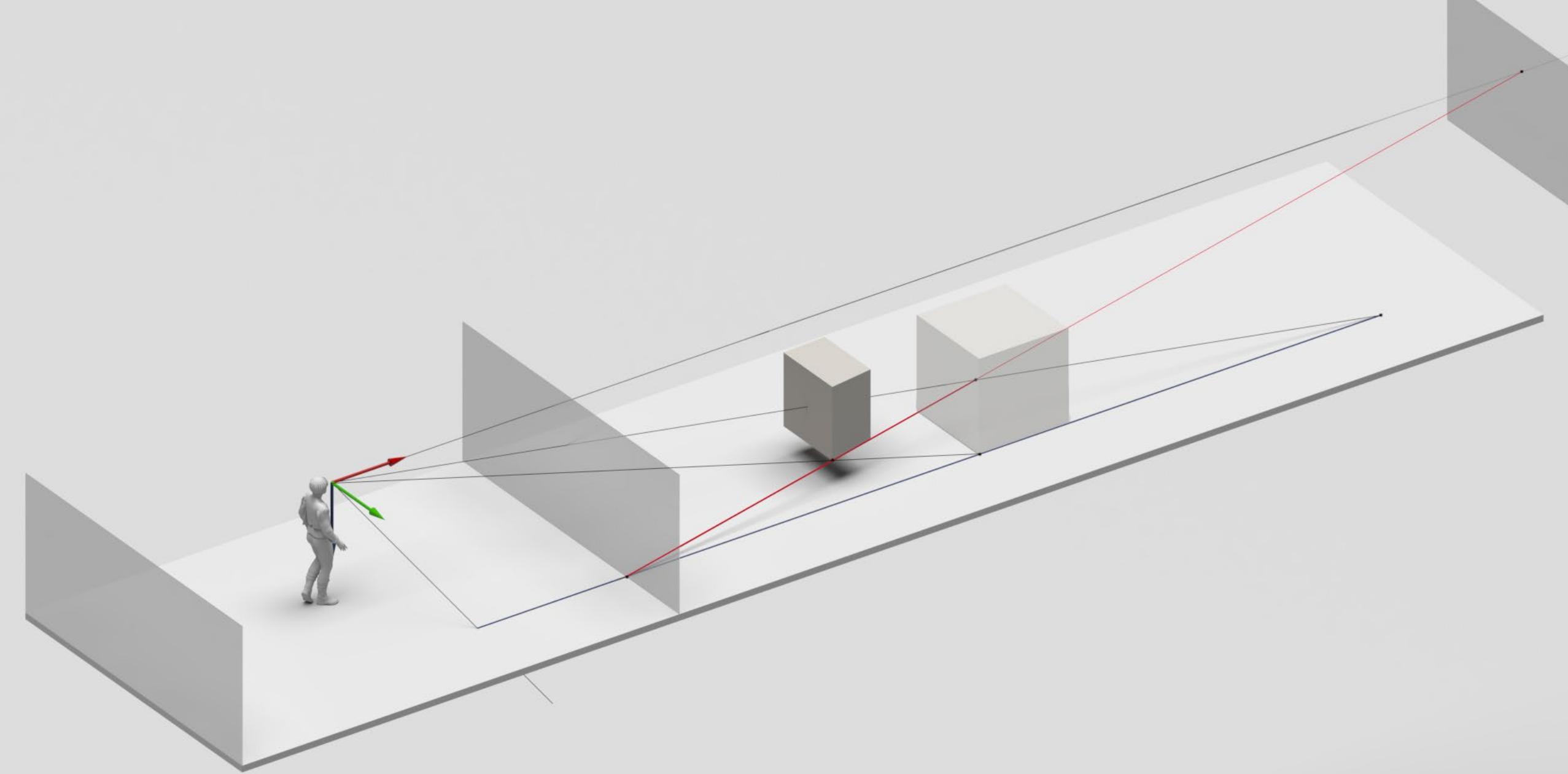


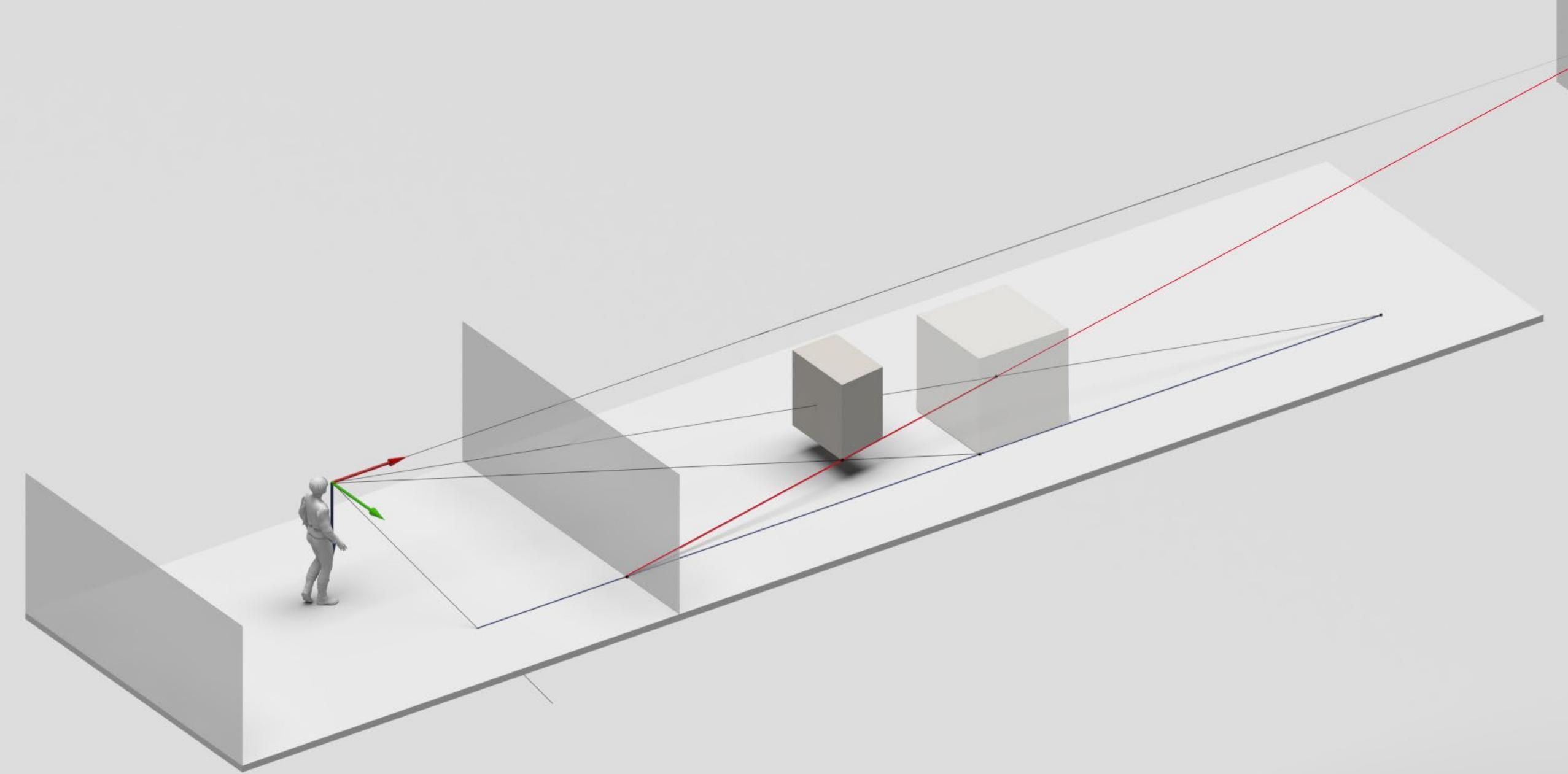


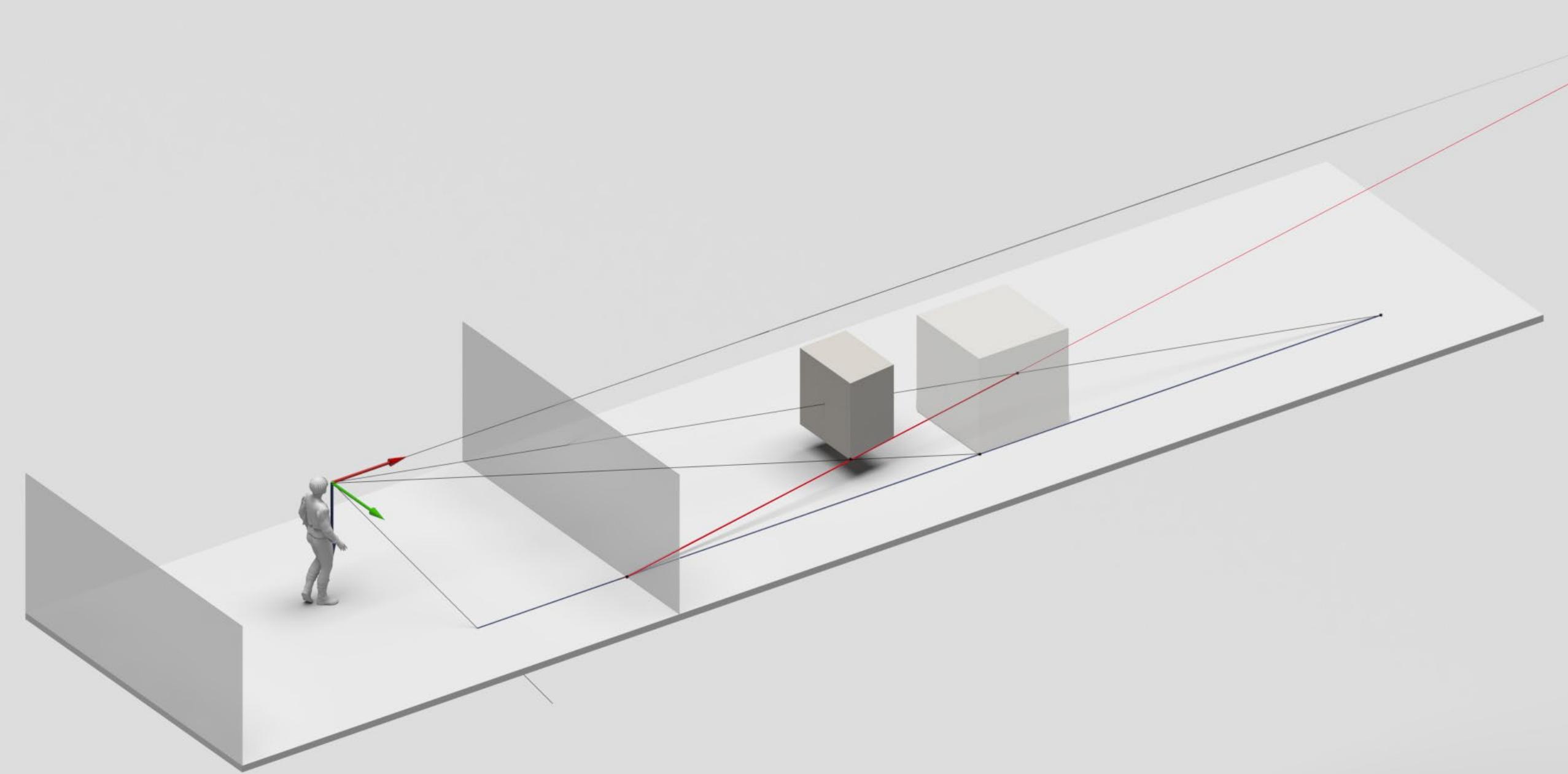


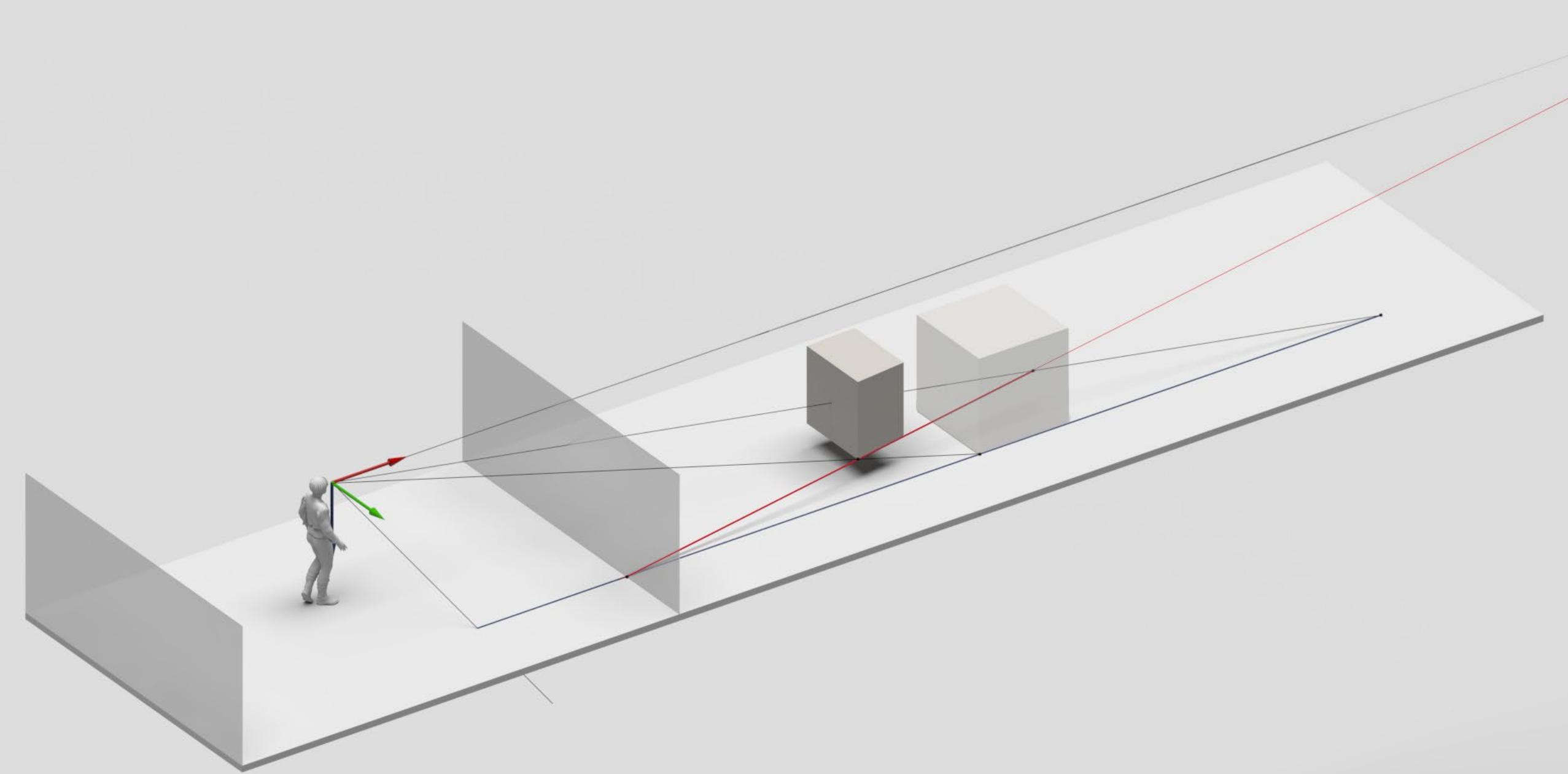


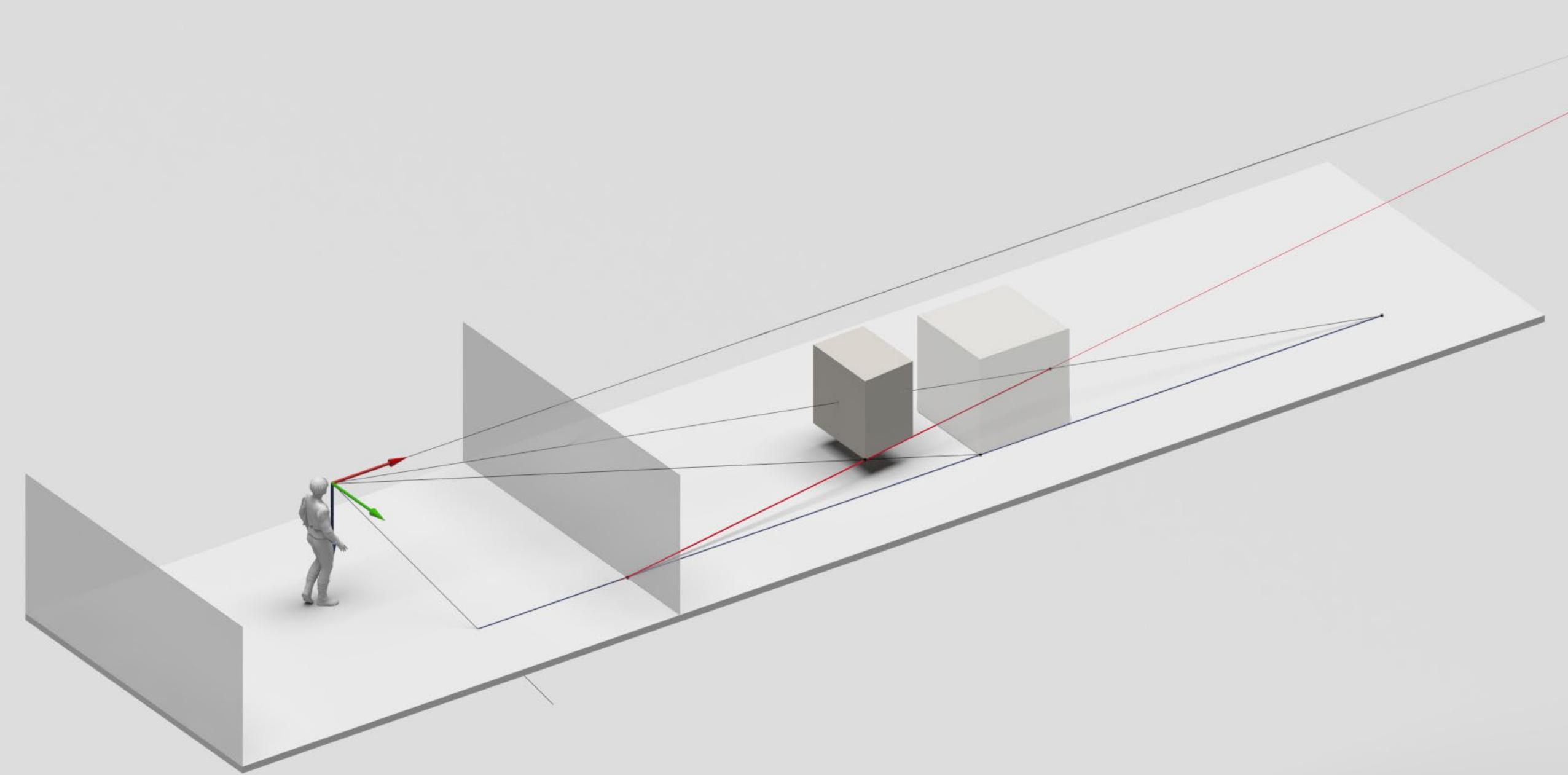


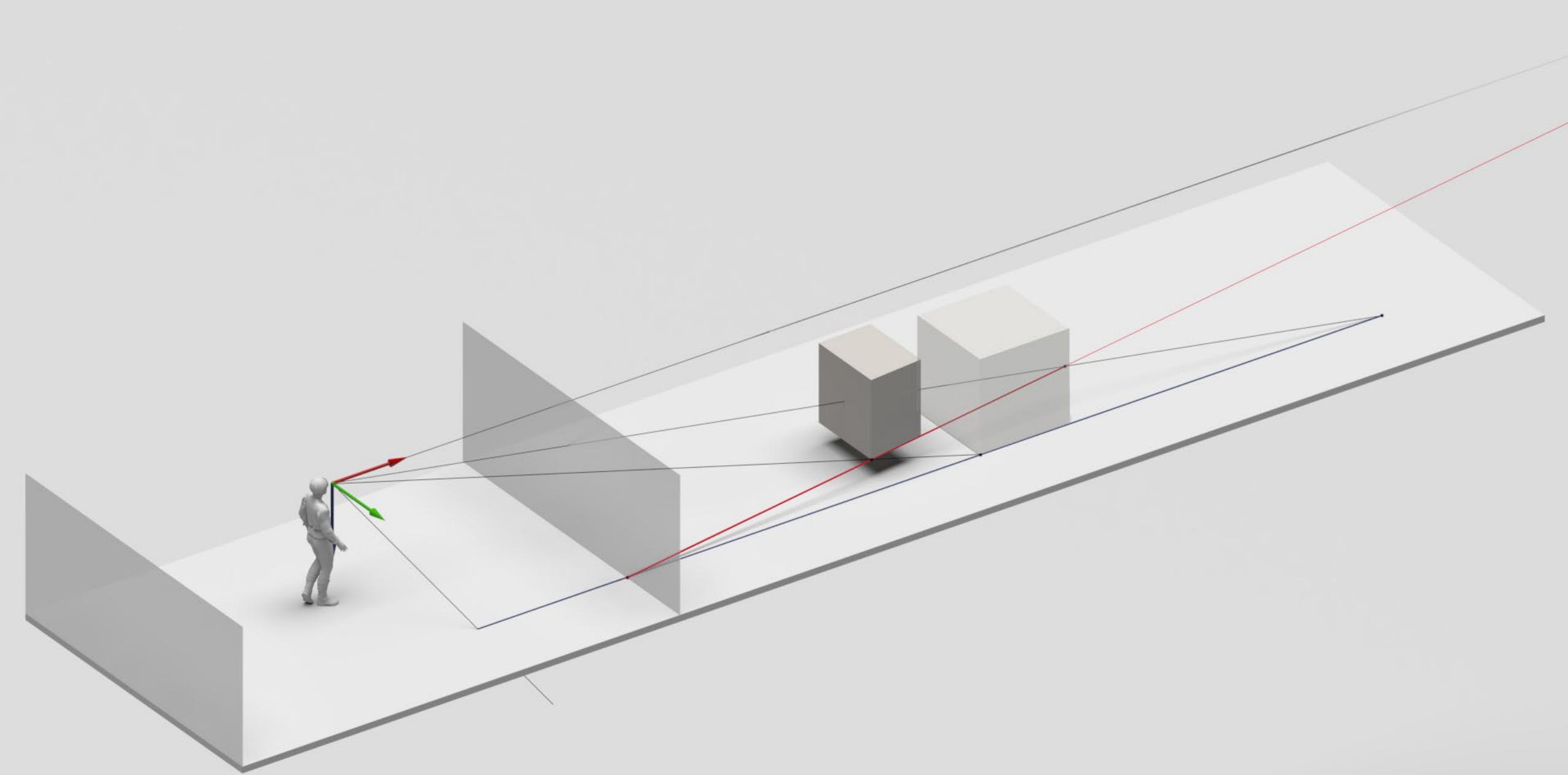


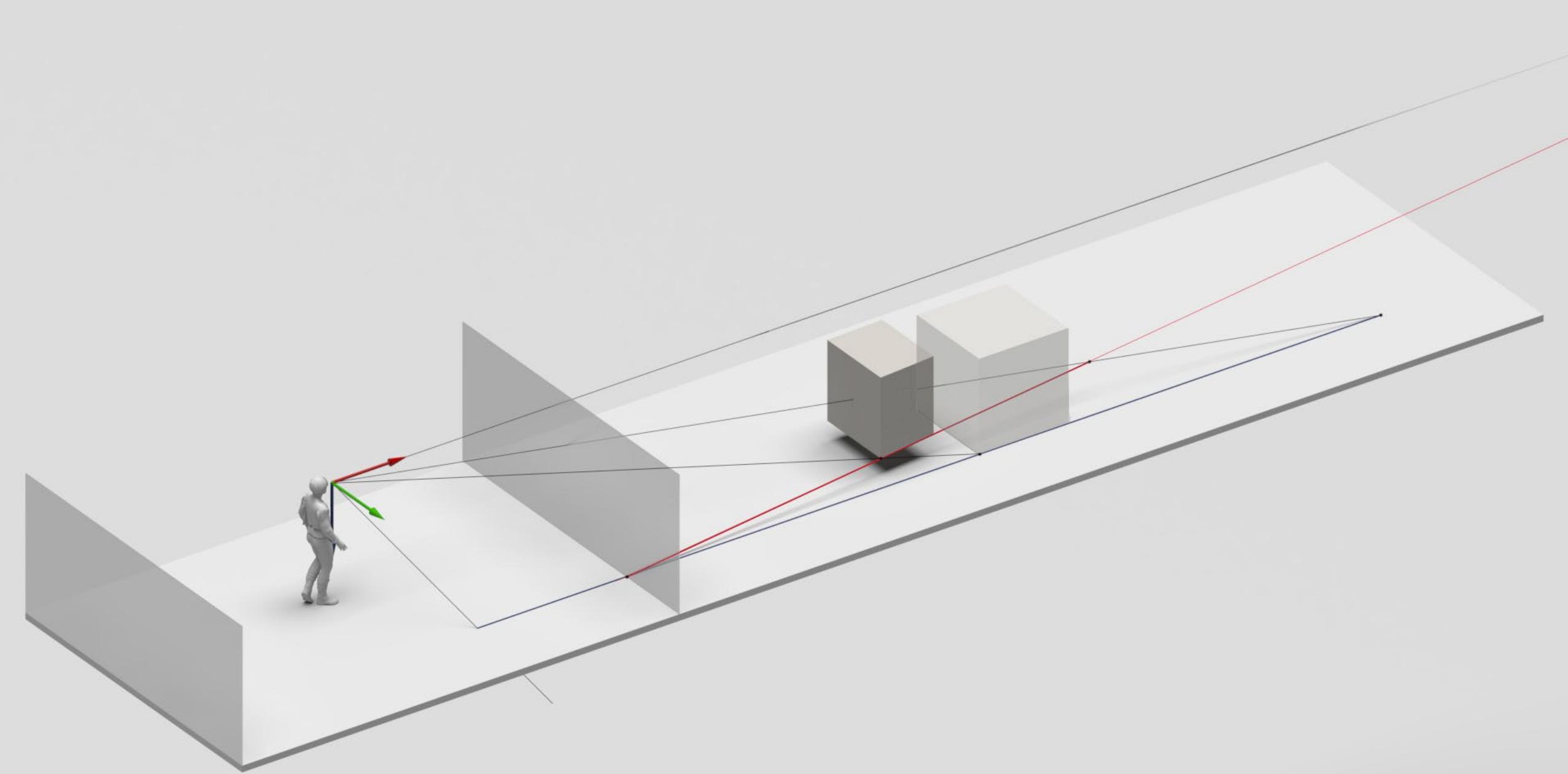


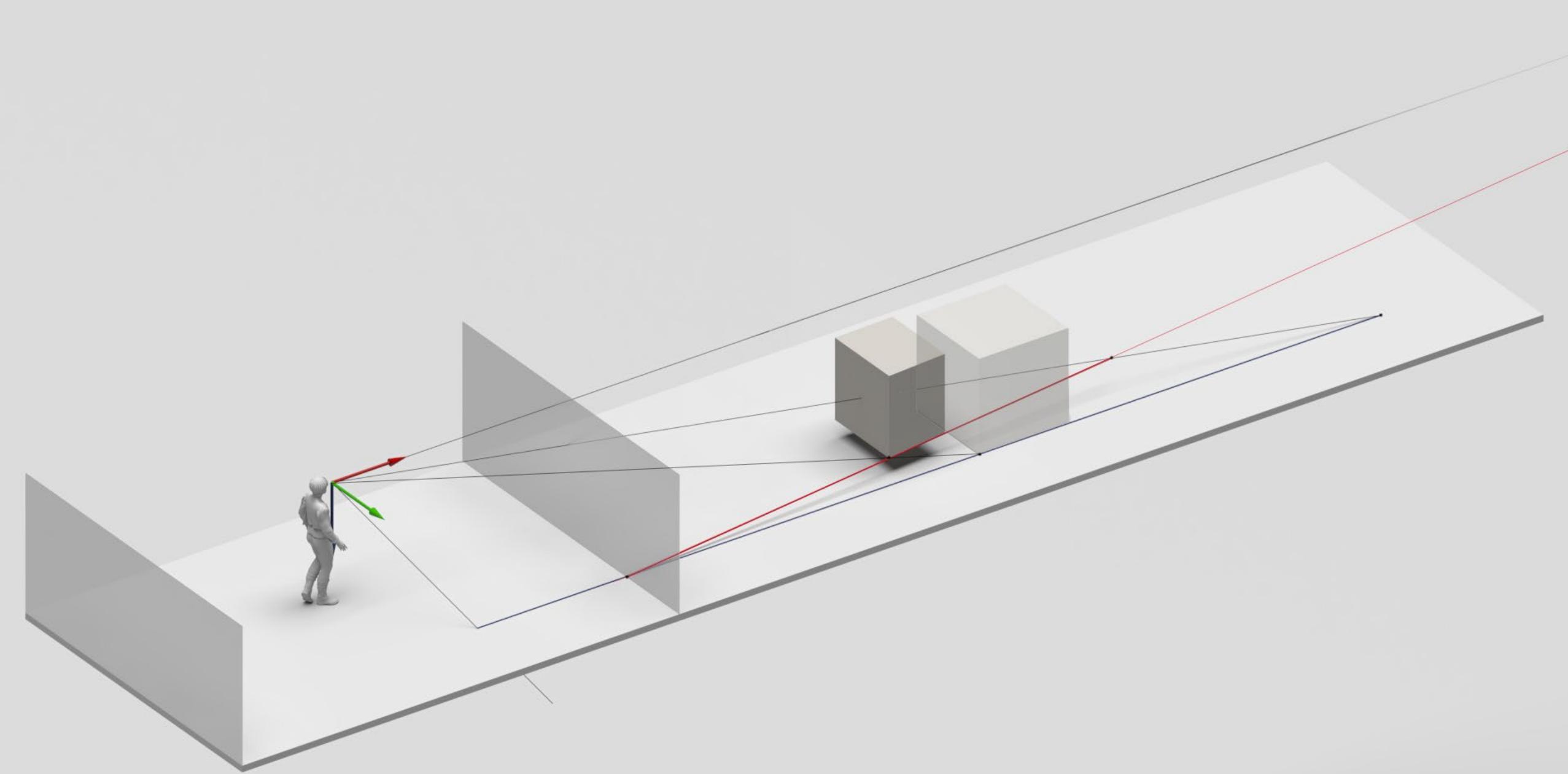






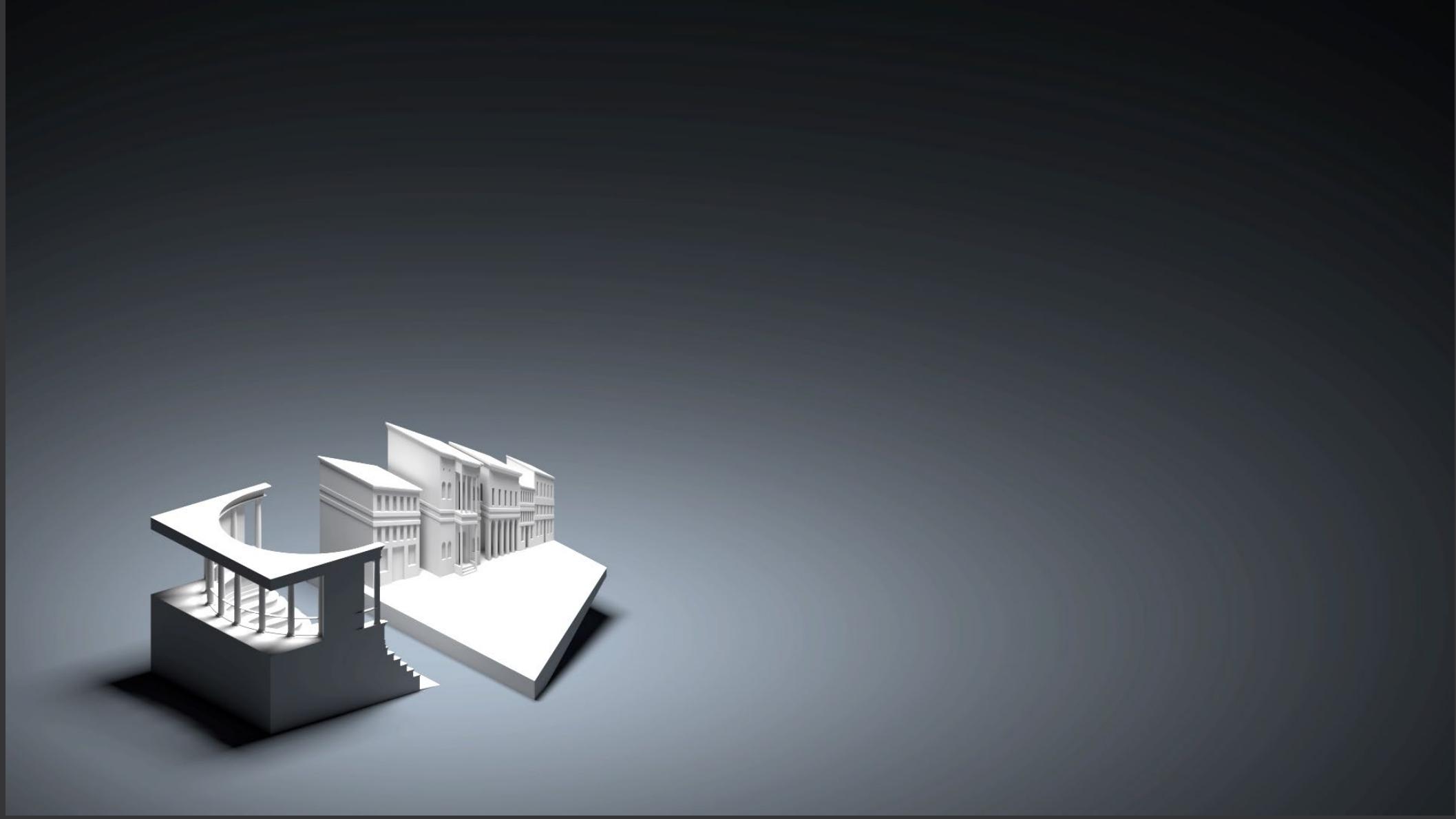






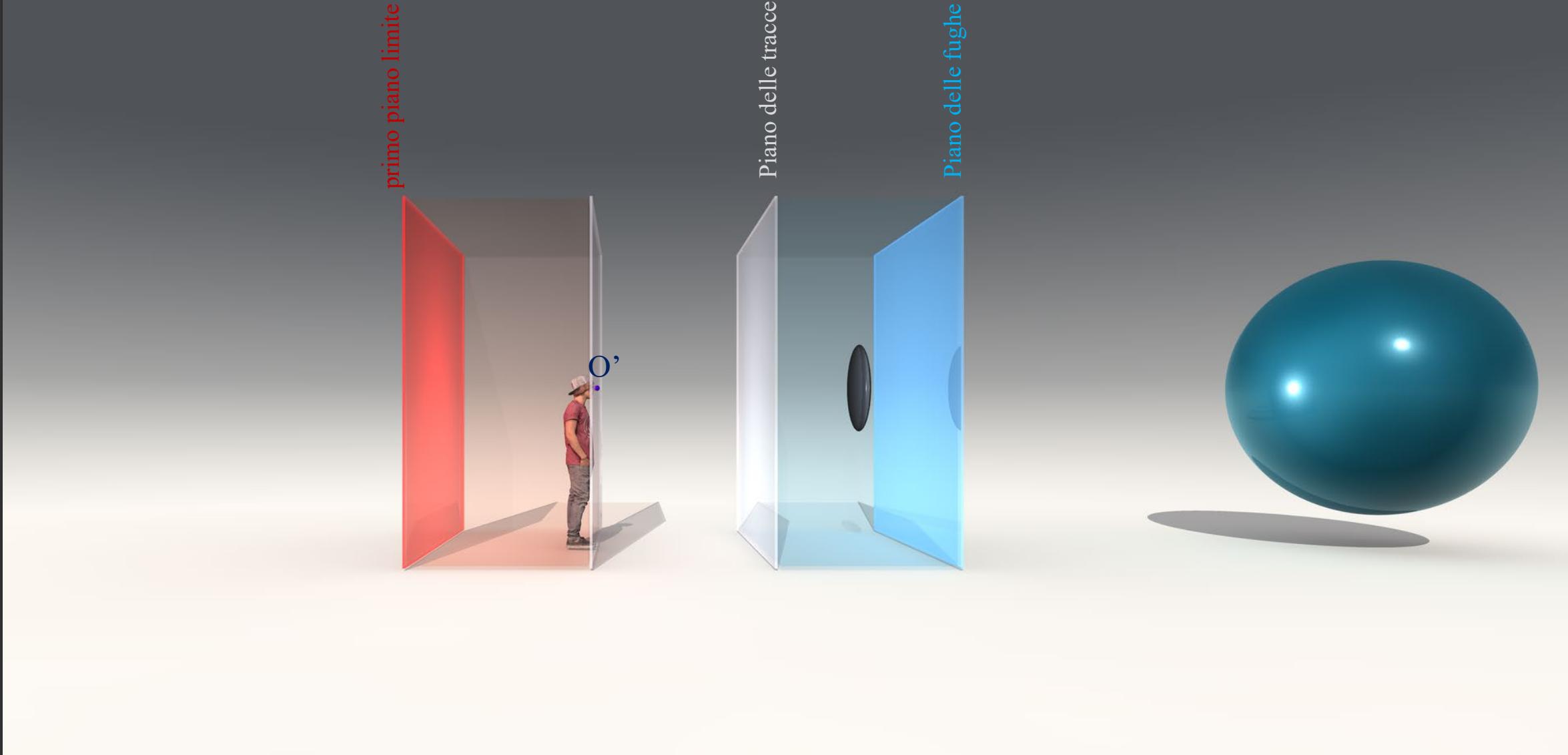


Un esempio meno conosciuto: la cappella Avila di Antonio Gherardi (1678)



Prospettiva solida nella scenografia teatrale rinascimentale

Le trasformazioni proiettive della sfera.



I ragionamenti fatti, possono essere utilizzati per analizzare le trasformazioni proiettive di una sfera con una procedura del tutto analoga a quella utilizzata per analizzare le trasformazioni proiettive del cerchio. Ma a differenza da quest'ultimo caso, non faremo uso delle operazioni di proiezione piana (il cerchio si trasformava nelle altre curve coniche) ma di proiezione solida perché abbiamo bisogno di trasformare la superficie sferica secondo altre superfici, cosa che non sarebbe possibile ottenere se lavorassimo nel piano di quadro.

Nella nostra scena abbiamo un osservatore (o centro di proiezione) O' , il piano delle fughe (in celeste) e il piano delle tracce (in grigio chiaro). Ci proponiamo di proiettare nello spazio, i punti di una sfera (in verde petrolio) e generarne così la sua prospettiva solida.

primo piano limite



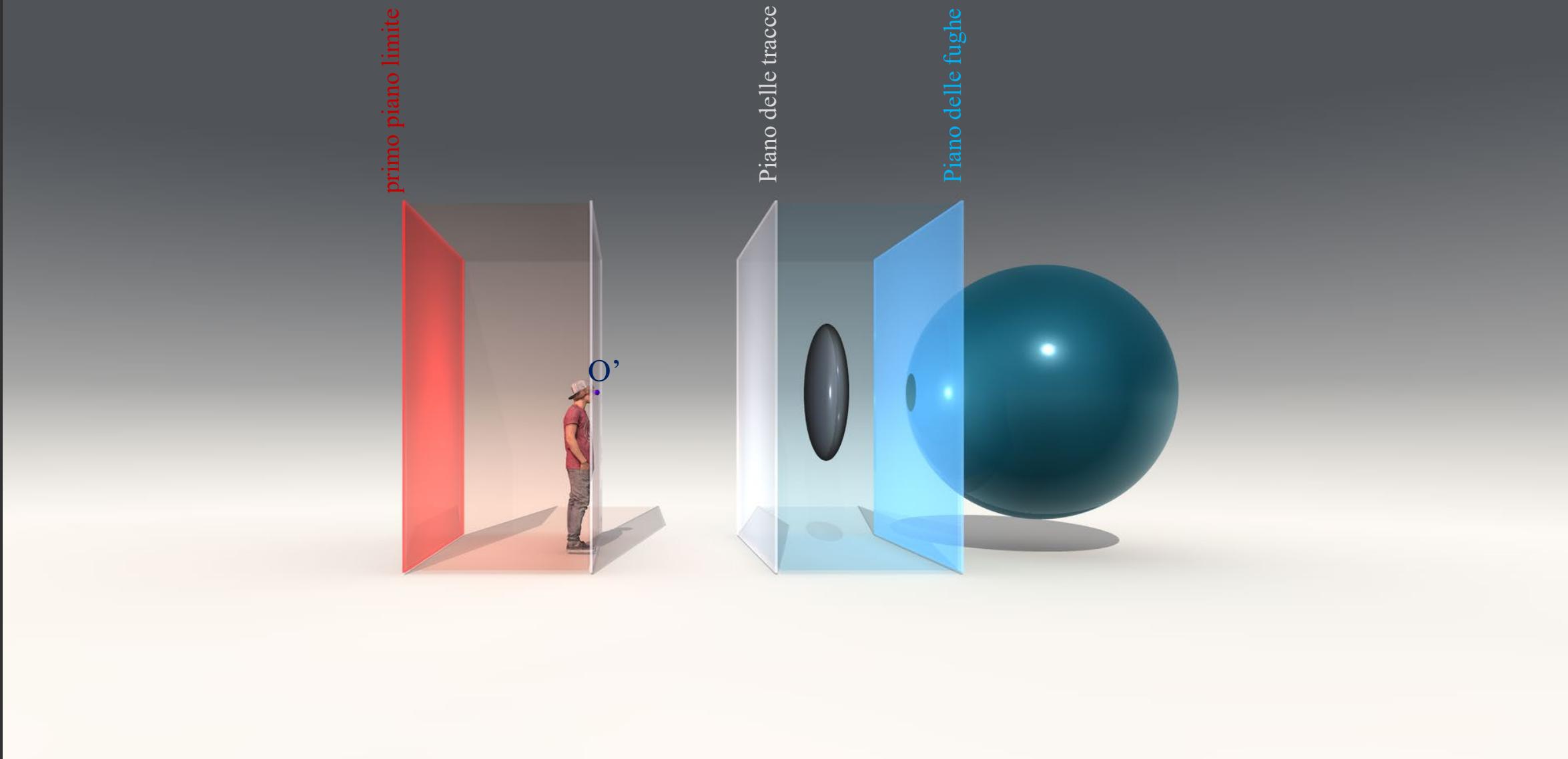
Piano delle tracce



Piano delle fughe



Vista frontale della scena precedente.



È possibile implementare in un modello numerico le operazioni analitiche che definiscono le trasformazioni proiettive dei punti della sfera di origine e di renderle visibili in un'animazione interattiva, nella quale la sfera muovendosi verso l'osservatore si trasforma in altre superfici quadriche non rigate.

Ricordo che il modello realizzato dal Prof. Riccardo Migliari è disponibile nel sito del corso.

La sfera reale (in verde petrolio) comincia a muoversi verso l'osservatore: la sua prospettiva solida è un *ellissoide* (in grigio).

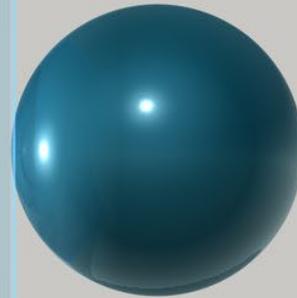
primo piano limite



Piano delle tracce



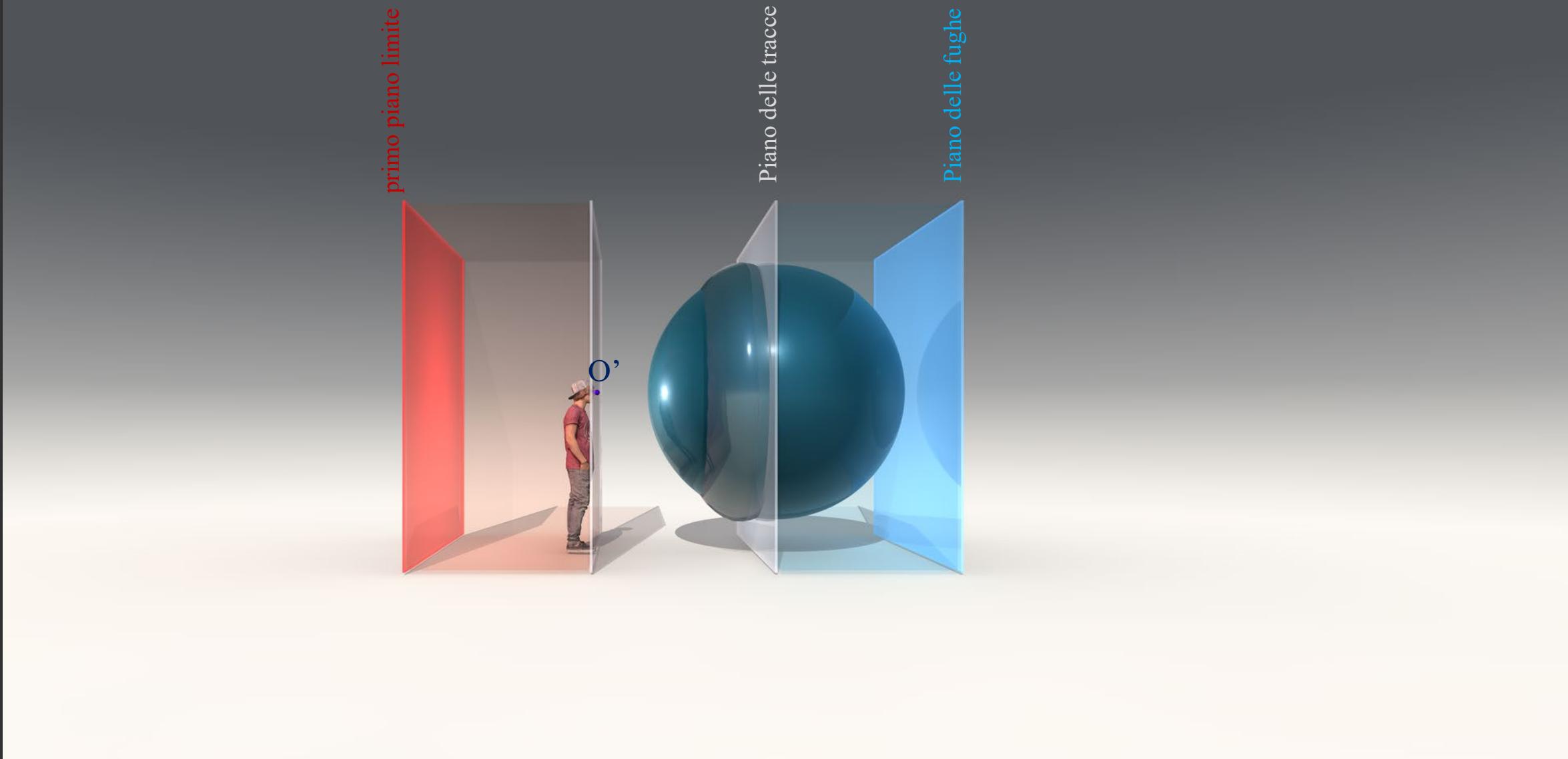
Piano delle fughe



È possibile implementare in un modello numerico le operazioni analitiche che definiscono le trasformazioni proiettive dei punti della sfera di origine e di renderle visibili in un'animazione interattiva, nella quale la sfera muovendosi verso l'osservatore si trasforma in altre superfici quadriche non rigate.

Ricordo che il modello realizzato dal Prof. Riccardo Migliari è disponibile nel sito del corso.

La sfera reale (in verde petrolio) comincia a muoversi verso l'osservatore: la sua prospettiva solida è un *ellissoide* (in grigio). *Vista frontale della scena precedente.*

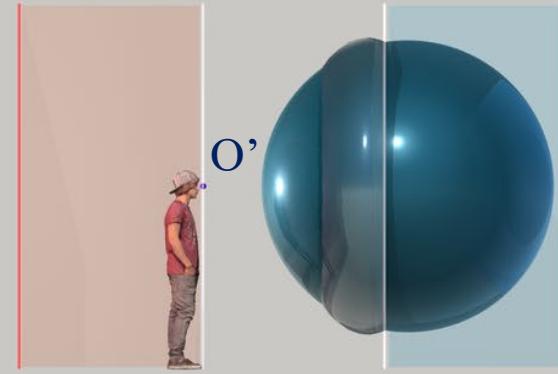


La sfera reale attraversa il piano delle fughe e delle tracce, la sua prospettiva solida è ancora un *ellissoide* (in figura è poco visibile perché si interseca con la sfera oggettiva).

primo piano limite

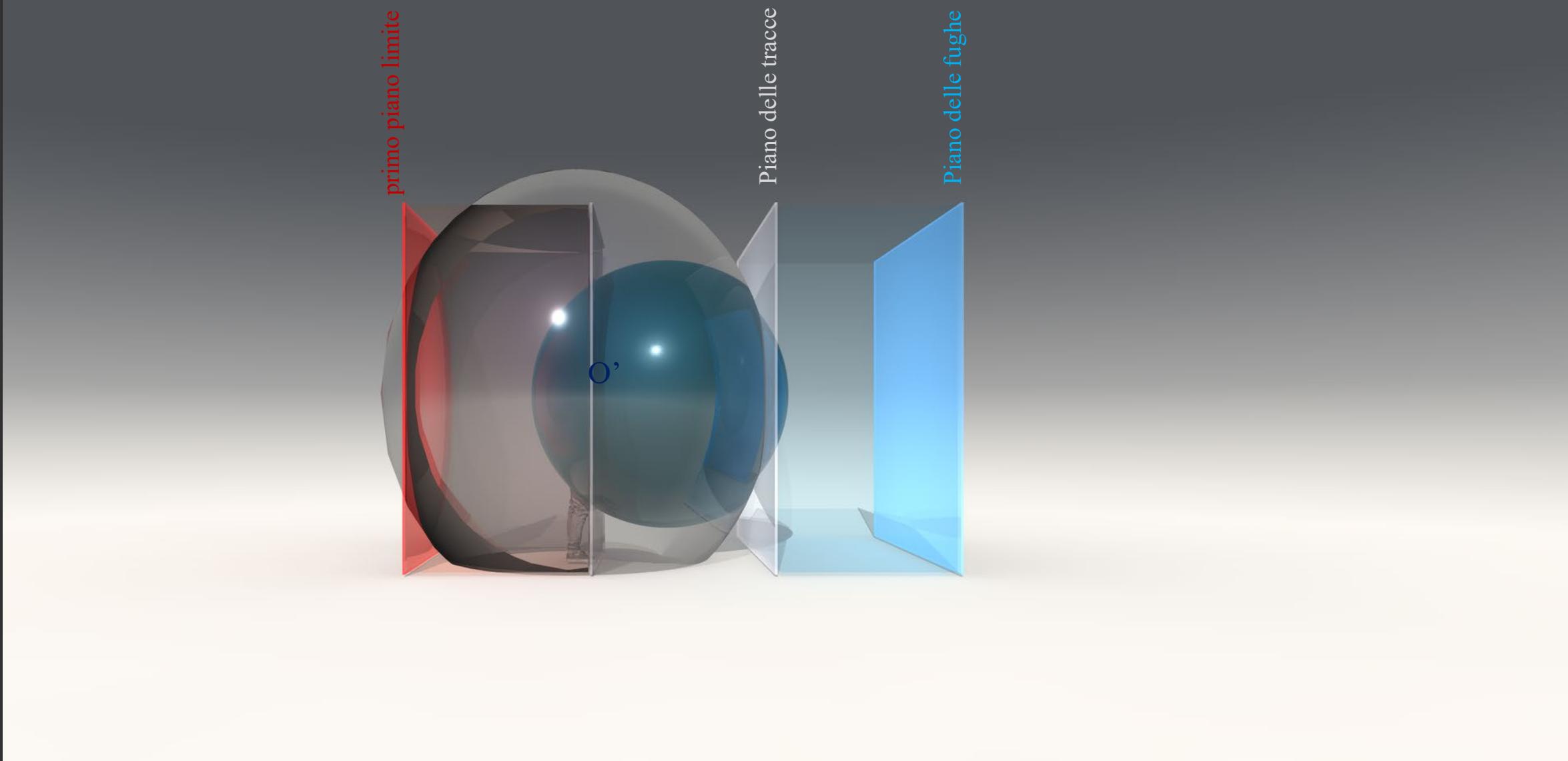
Piano delle tracce

Piano delle fughe



La sfera reale attraversa il piano delle fughe e delle tracce, la sua prospettiva solida è ancora un *ellissoide* (in figura è poco visibile perché si interseca con la sfera oggettiva).

Vista frontale della scena precedente.



La sfera reale continua il suo movimento verso sinistra e ingloba anche il centro di proiezione. Ricordiamo che le operazioni di proiezione e sezione sono valide dal punto di vista geometrico, anche per punti che sono «alle spalle» del centro di proiezione.

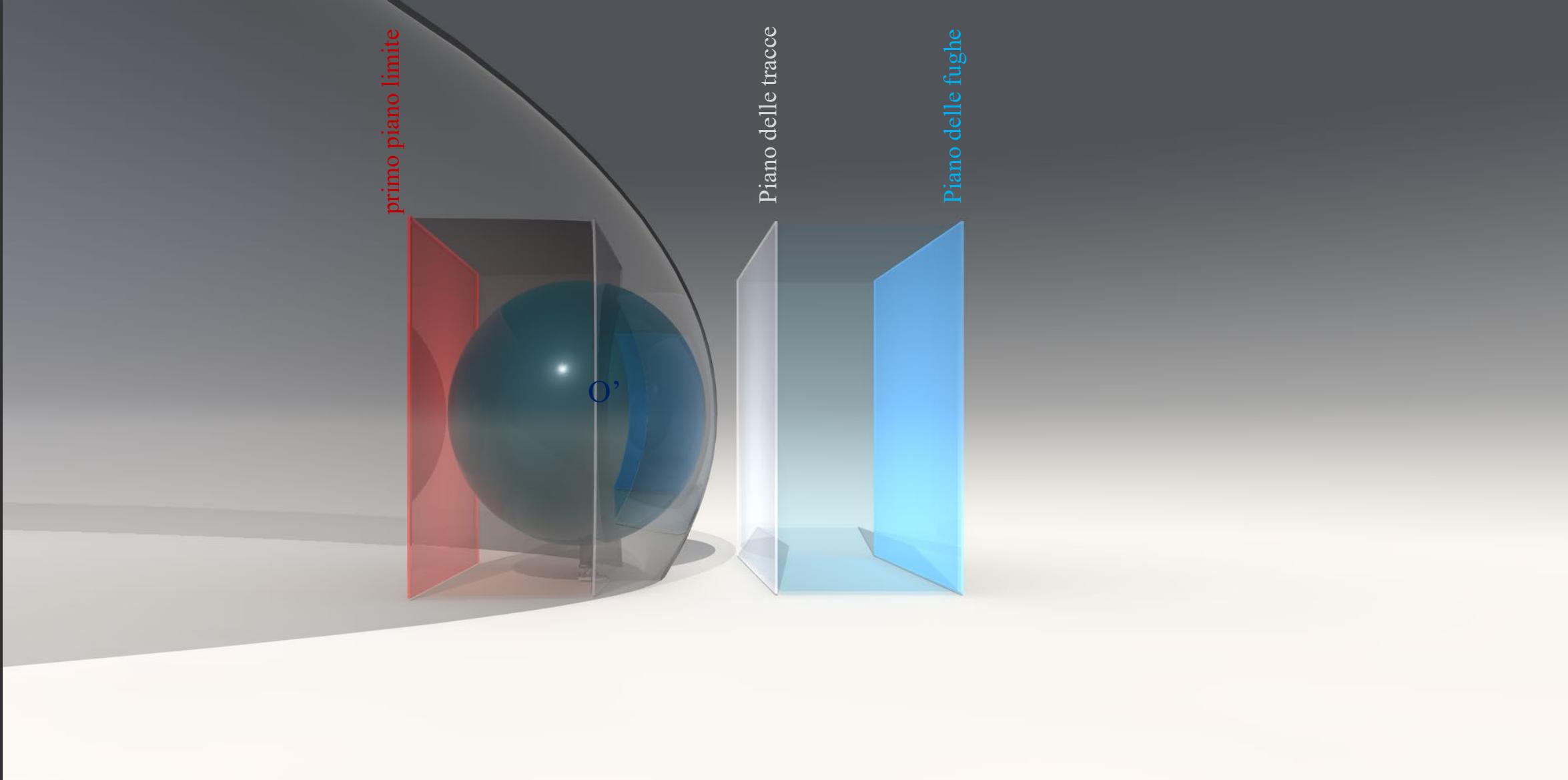
La prospettiva solida della sfera è ancora una volta un *ellissoide* che però è sempre meno «schiacciato» e tende ad allungarsi.



La sfera reale continua il suo movimento verso sinistra e ingloba anche il centro di proiezione. Ricordiamo che le operazioni di proiezione e sezione sono valide dal punto di vista geometrico, anche per punti che sono «alle spalle» del centro di proiezione.

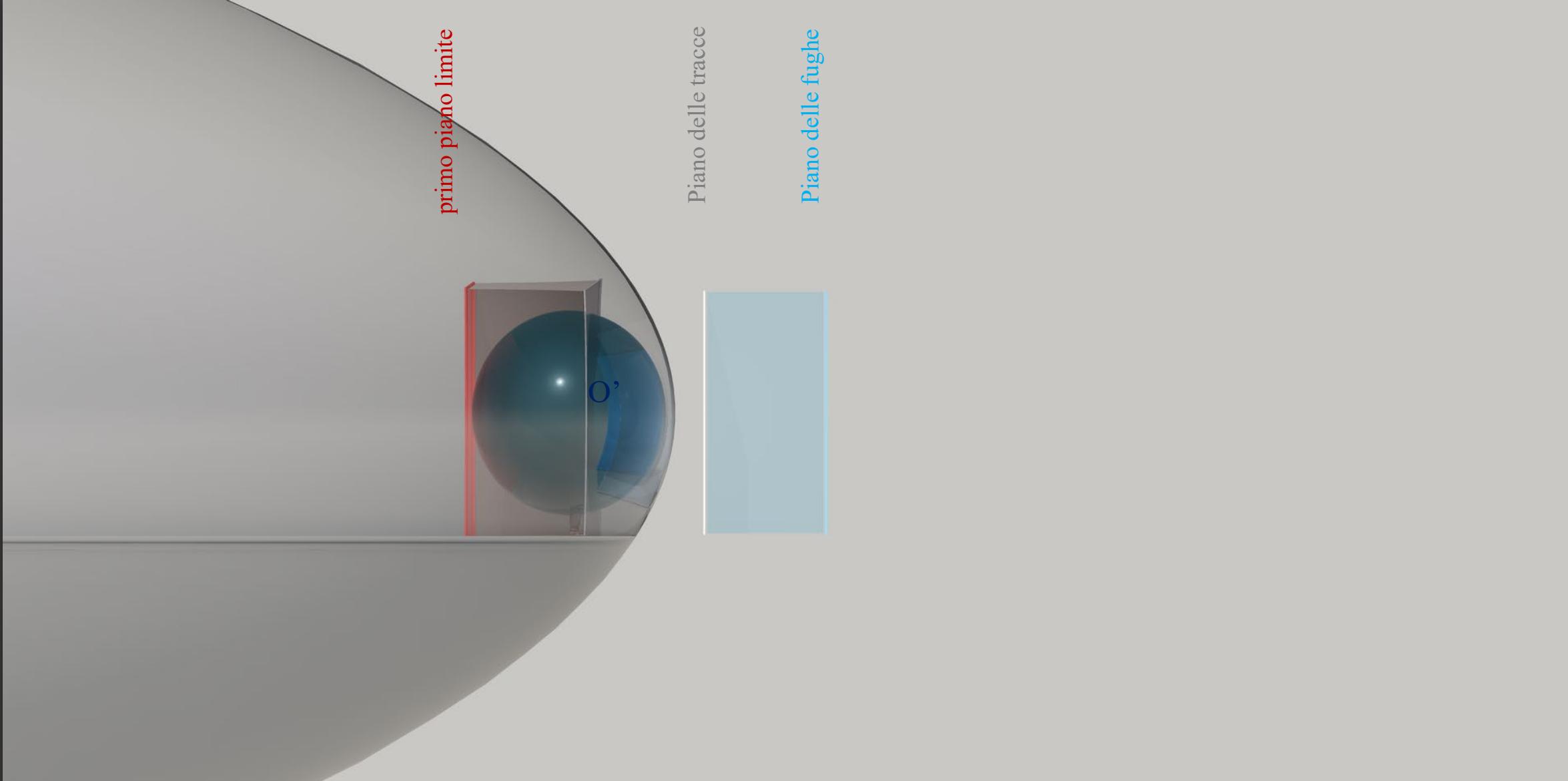
La prospettiva solida della sfera è ancora una volta un *ellissoide* che però è sempre meno «schiacciato» e tende ad allungarsi.

Vista frontale della scena precedente.



La sfera reale arriva a toccare in un punto il primo piano limite. L'immagine di questo punto diviene allora un «punto all'infinito» e la sfera si trasforma in una superficie quadrica non rigata aperta e cioè il *paraboloide ellittico* (ancora in grigio trasparente in figura).

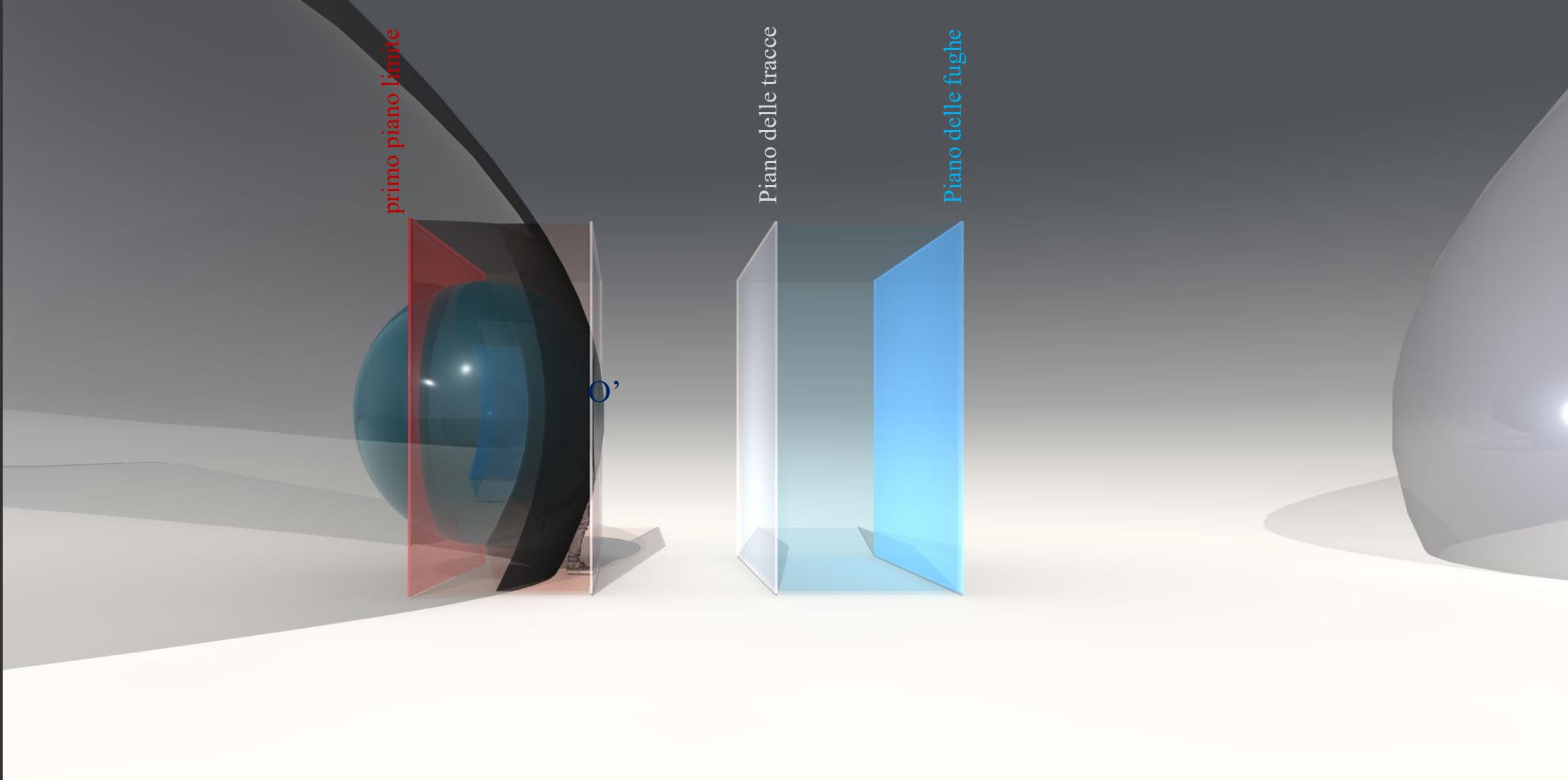
Si noti il parallelismo con le trasformazioni proiettive del cerchio che quando tocca in un punto il piano anteriore (il piano parallelo al quadro e passante per l'osservatore) si proietta secondo una parabola.



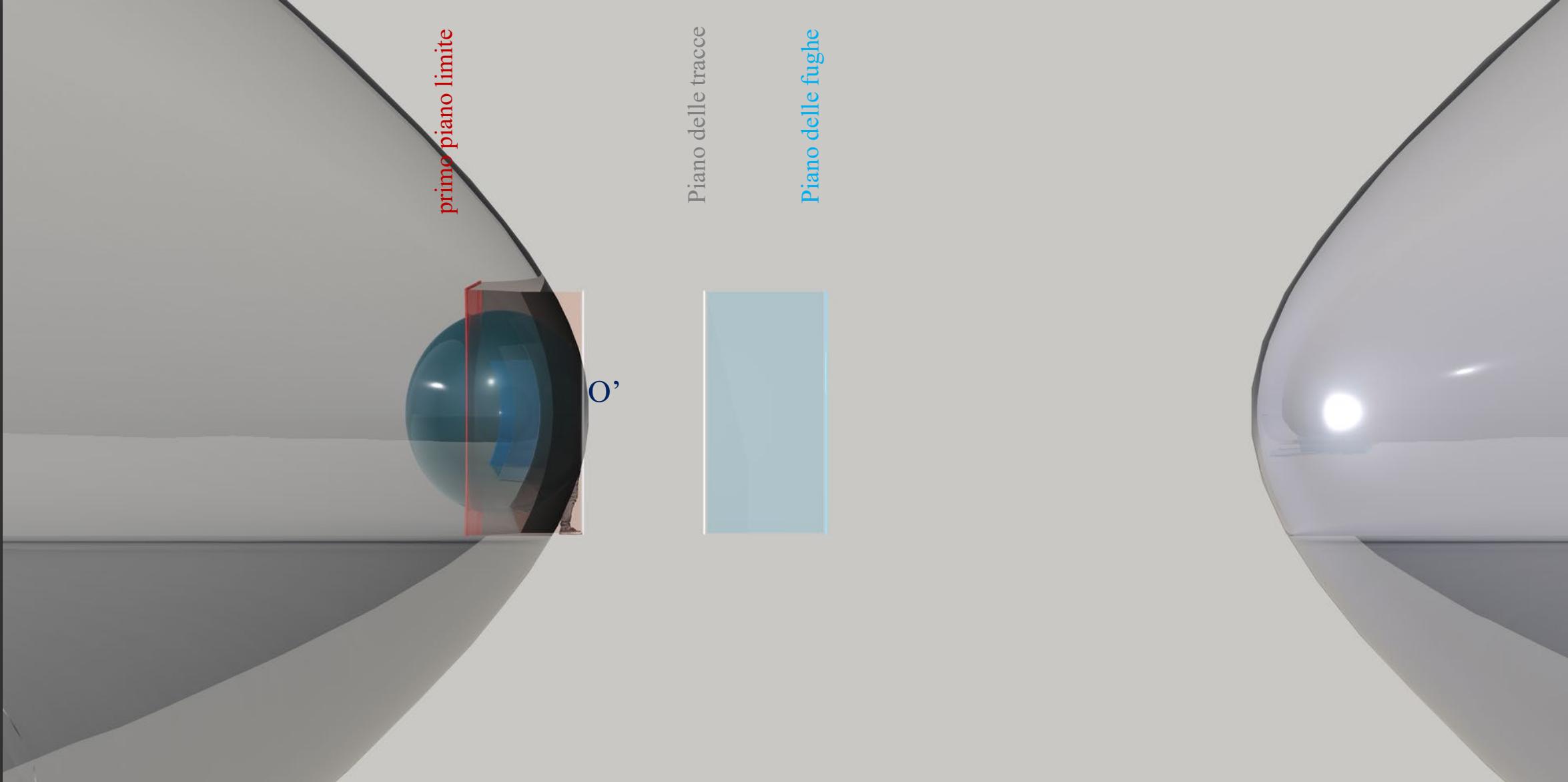
La sfera reale arriva a toccare in un punto il primo piano limite. L'immagine di questo punto diviene allora un «punto all'infinito» e la sfera si trasforma in una superficie quadrica non rigata aperta e cioè il *paraboloide ellittico* (ancora in grigio trasparente in figura).

Si noti il parallelismo con le trasformazioni proiettive del cerchio che quando tocca in un punto il piano anteriore (il piano parallelo al quadro e passante per l'osservatore) si proietta secondo una parabola.

Vista frontale della scena precedente. Si notino alcuni errori di visualizzazione del primo piano limite dovuti alla rifrazione del materiale trasparente.

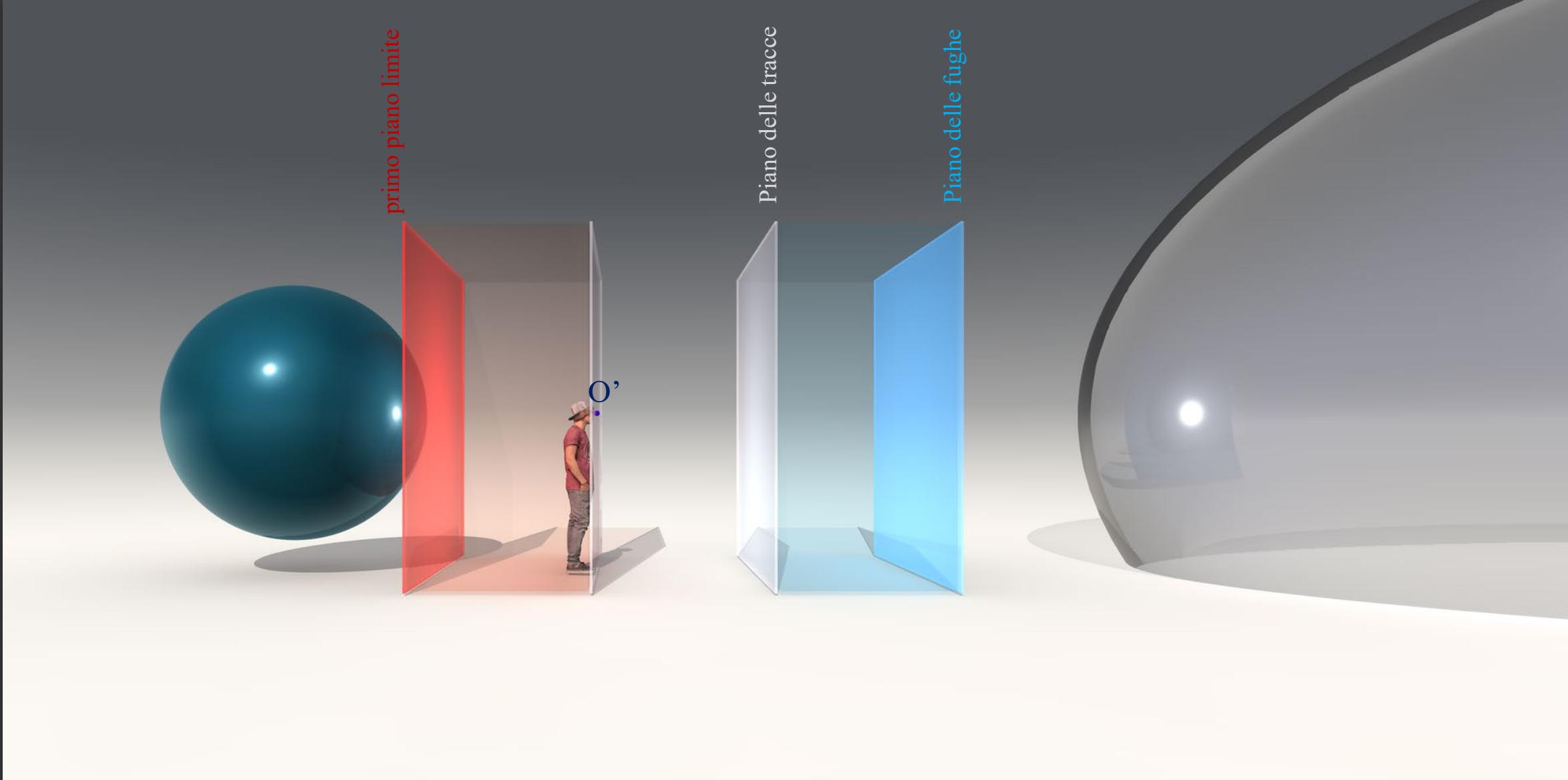


La sfera reale attraversa il primo piano limite e la sfera si proietta secondo un *iperboloide a due falde* esattamente come succedeva nel cerchio che attraversando il piano anteriore e si trasformava in un'iperbole.

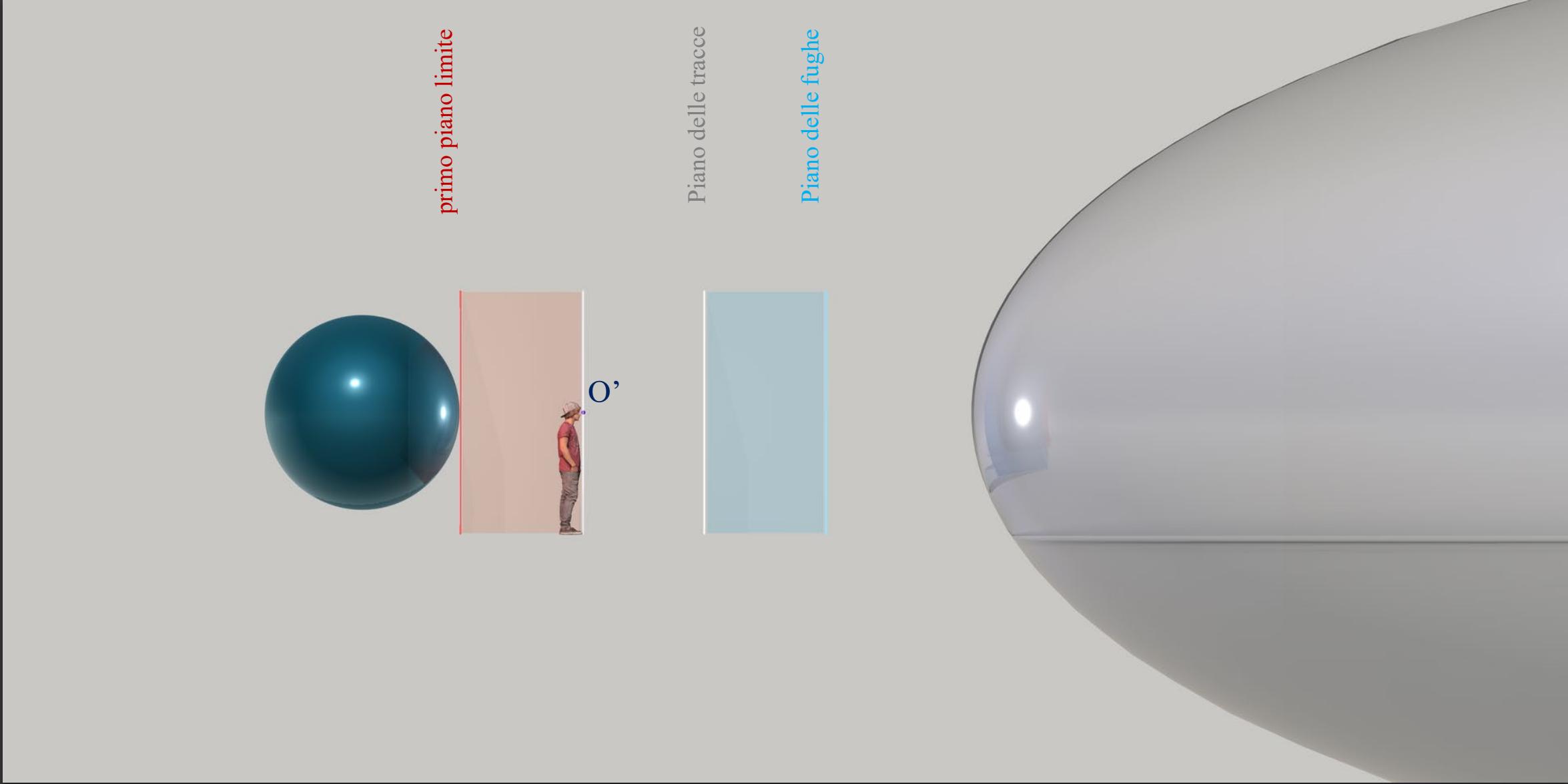


La sfera reale attraversa il primo piano limite e la sfera si proietta secondo un *iperboloide a due falde* esattamente come succedeva nel cerchio che attraversando il piano anteriore e si trasformava in un'iperbole.

Vista frontale della scena precedente. Si notino alcuni errori di visualizzazione del primo piano limite dovuti alla rifrazione del materiale trasparente.

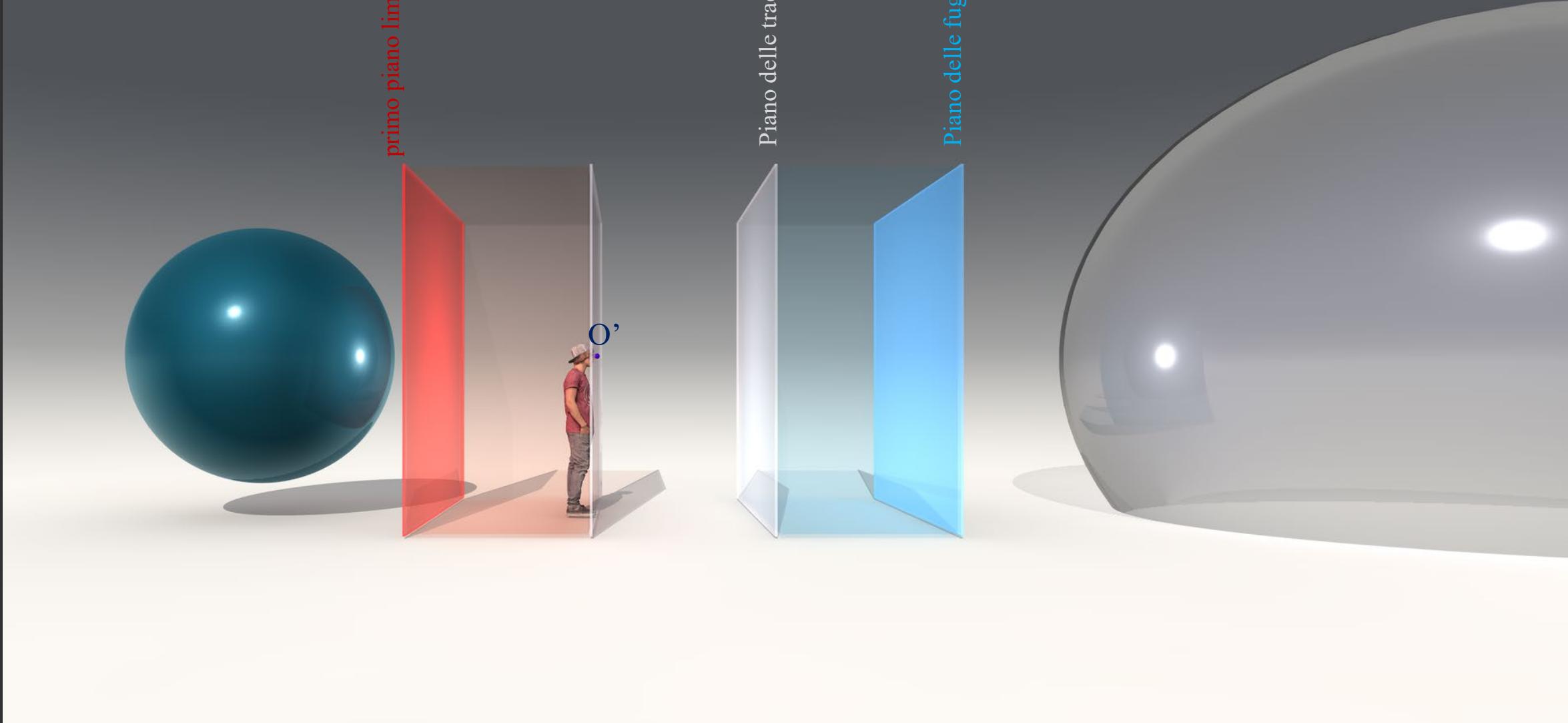


La sfera reale, continuando il suo movimento verso sinistra, diventa nuovamente tangente in un punto al primo piano limite. Anche in questo caso si trasforma in un *paraboloido ellittico* che, a differenza di quanto avveniva prima, è collocato di fronte all'osservatore e non più alle sue spalle.

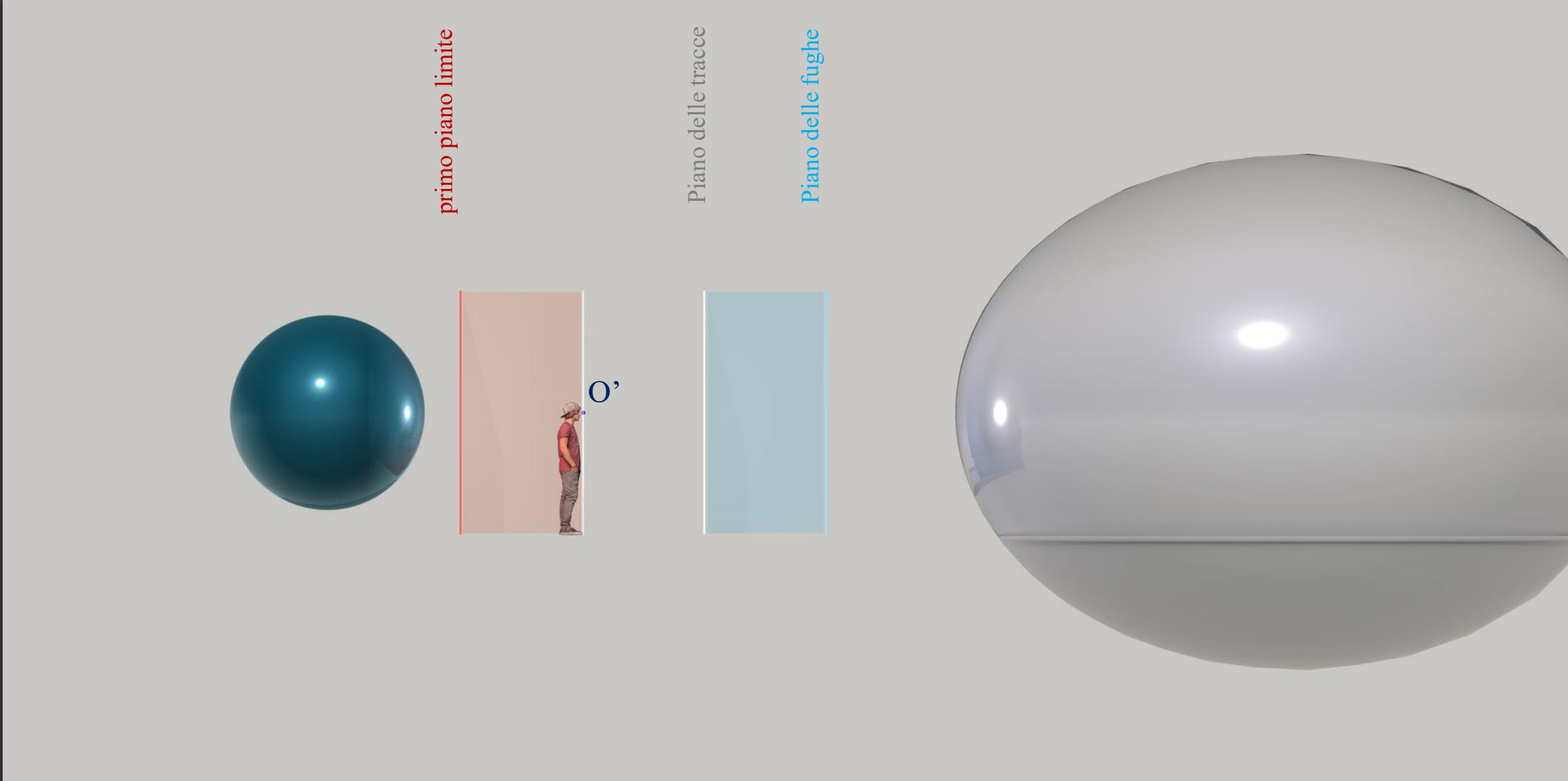


La sfera reale, continuando il suo movimento verso sinistra, diventa nuovamente tangente in un punto al primo piano limite. Anche in questo caso si trasforma in un *paraboloido ellittico* che, a differenza di quanto avveniva prima, è collocato di fronte all'osservatore e non più alle sue spalle.

Vista frontale della scena precedente.



La sfera reale, continuando il suo movimento verso sinistra, non ha più nessun elemento in comune con il primo piano limite. La sua prospettiva torna ad essere una superficie quadrica non rigata chiusa e cioè un *ellissoide* che tronerà a «schiacciarsi» mano a mano che la sfera reale si allontanerà da O'.



La sfera reale, continuando il suo movimento verso sinistra, non ha più nessun elemento in comune con il primo piano limite. La sua prospettiva torna ad essere una superficie quadrica non rigata chiusa e cioè un *ellissoide* che tronerà a «schiacciarsi» mano a mano che la sfera reale si allontanerà da O'.

Vista frontale della scena precedente.