

TEOREMA del resto di Lagrange.

$f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte in (a,b) .

Siano $x_0, x \in (a,b)$, $x_0 \neq x$.

$\Rightarrow \exists c$ compreso tra x e x_0 t.c.

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k}_{T_n(x; x_0)} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Applicazione:

Calcolo di e con un errore inferiore a 10^{-3} .

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + E_n(x)$$

$$x=1$$

$$\Rightarrow e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + E_n(1)$$

Valutiamo $E_n(1)$. Per il teorema

$$E_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!} \leq e^1 = e \quad \text{dove } c \in (0,1)$$

$$\Rightarrow 0 \leq E_n(1) \leq \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

Quindi affinché l'errore sia $< 10^{-3}$, basterà trovare n t.c.

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3} \Leftrightarrow (n+1)! > 3000$$

Basta prendere $n=6 \Rightarrow (n+1)! = 7! = 5040 > 3000$ ok!

Valore approssimato di e :

$$\begin{aligned} e &\approx T_6(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \\ &= \frac{720 + 720 + 360 + 120 + 30 + 6 + 1}{720} = \frac{1957}{720} \approx \\ &\approx 2,71805 \end{aligned}$$

$$e \approx 2,71828$$

La differenza è circa $2 \cdot 10^{-4}$

Calcoliamo $\sin 1$ a meno di 10^{-3} .

$$\sin x = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x)} + E_{2n+2}(x)$$

$$x = 1$$

$$\sin 1 = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} + E_{2n+2}(1).$$

$$c \in (0, 1)$$

$$E_{2n+2}(1) = \frac{\frac{(2n+3)}{(2n+3)!}(c) \underbrace{(x-x_0)^{2n+3}}_1}{(2n+3)!} = \pm \frac{\cos c}{(2n+3)!}$$

$$|E_{2n+2}(1)| = \frac{|\cos c|}{(2n+3)!} \leq \frac{1}{(2n+3)!}$$

Devo trovare n t.c. $\frac{1}{(2n+3)!} < 10^{-3} \Leftrightarrow (2n+3)! > 1000$

Basta prendere $n=2 \Rightarrow E_{2n+2}(1) < 10^{-3}$
 $E_6(1)$

$$n=2 \Rightarrow T_{2n+2}(1) = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{120-20+1}{120} = \frac{101}{120} \approx 0,84167$$

La calcolatrice fornisce 0,84147.

Oss Per la presenza di $(x-x_0)^{n+1}$ nella formula del resto, l'approssimazione è migliore se $x-x_0$ è "piccolo"

Calcolare $\sqrt{17}$ a meno di 10^{-6} .

1° modo. $\sqrt{17} = \left(\sqrt{1+x} \right) \Big|_{x=16}$

Uso lo sviluppo di Maclaurin di $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^n \binom{1/2}{k} x^k + E_n(x)$$

$$x=16$$

$$\sqrt{17} = \sum_{k=0}^n \binom{1/2}{k} 16^k + E_n(16)$$

$$E_n(16) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} 16^{n+1} \quad c \in (0, 16)$$

$$f(x) = (1+x)^{1/2}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) (1+x)^{-3/2}$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) (1+x)^{1/2-k}$$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(c) &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n\right) (1+c)^{\frac{1}{2}-n-1} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{(1+c)^{n+1/2}} = \\ &= \frac{(-1)^n 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} (1+c)^{n+1/2}} \end{aligned}$$

$$0 \leq c \leq 16$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |E_n(16)| &= \left| \frac{(-1)^n 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} (1+c)^{n+1/2}} \frac{16^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \\ &= \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} (n+1)!} \frac{2^{4n+4}}{(1+c)^{n+1/2}} < \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{(n+1)!} 2^{3n+3} \end{aligned}$$

✓
1

Fare tentativi. Questa quantità non va a zero.

Idea: $\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = 4 \sqrt{1 + \frac{1}{16}}$

$$f(x) = 4 \sqrt{1+x}$$

$$4 \sqrt{1+x} = 4 \sum_{k=0}^n \binom{1/2}{k} \frac{1}{16^k} + E_n\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$\begin{aligned} \left| E_n\left(\frac{1}{16}\right) \right| &\leq 4 \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} (n+1)! 16^{n+1}} = \\ &\text{calcoli come prima} \\ &= \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{(n+1)! 2^{4n+4+n+1-2}} = \boxed{\frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{5n+3} (n+1)!}} \stackrel{?}{<} 10^{-6} \end{aligned}$$

Con il criterio del rapporto si vede che tende a zero

$$2^{5n+3} (n+1)! \stackrel{?}{>} 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot 10^6$$

$$n=4 \quad \underbrace{2^{23}}_{8 \cdot 10^6} \cdot 120 \stackrel{?}{>} \underbrace{3 \cdot 5 \cdot 7}_{105} \cdot 10^6 \quad \text{vero}$$

Valore approssimato.

$$T_4\left(\frac{1}{16}\right) = 4 \sum_{k=0}^4 \binom{1/2}{k} \frac{1}{16^k} \quad \text{che si calcola facilmente.}$$

Numeri complessi

Sono somme formali del tipo $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$.
 i è un simbolo t.c. $i^2 = -1$.

$2 - 3i$ è un numero complesso.

unità immaginaria

$$\text{se } z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

$$x = \text{parte reale di } z = \operatorname{Re}(z)$$

$$y = \text{parte immaginaria di } z = \operatorname{Im}(z)$$

N.B. La parte immaginaria è un numero reale.

$$\mathbb{C} = \{\text{numeri complessi}\} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Operazioni tra numeri complessi

$$(3 - 2i)(1 + 4i) = 3 + 12i - 2i - 8 \underbrace{i^2}_{-1} = 3 + 12i - 2i + 8 = 11 + 10i$$

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Tra i numeri complessi ci sono i numeri con parte immaginaria nulla

$$x + i \cdot 0$$

Questi numeri si identificano con i reali.

$$3 \in \mathbb{C}$$

$$3 + 0i$$

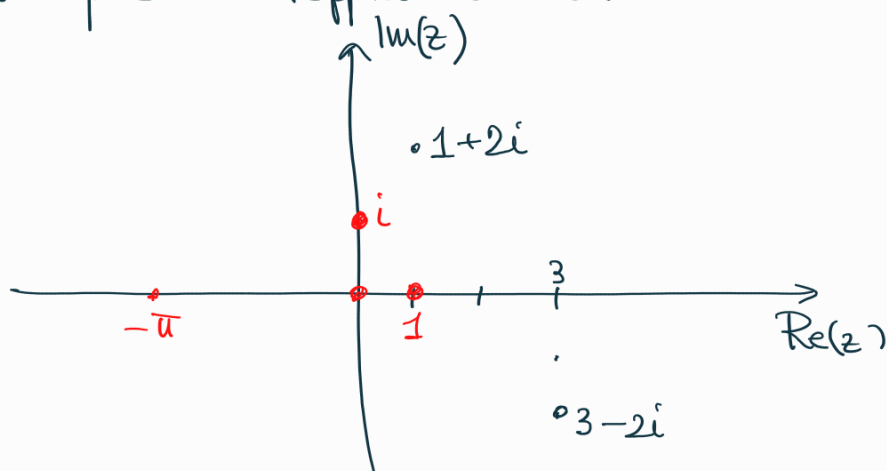
In questo senso $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

I numeri con parte reale nulla, ossia quelli della forma

$$z = 0 + iy = iy \quad (y \in \mathbb{R})$$

e si chiamano numeri immaginari puri.

I numeri complessi si possono rappresentare su un piano



Valgono le ordinarie proprietà (associativa, commutativa, distributiva) delle operazioni.

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$$

L'elemento neutro ^{rispetto} alla somma è $0 = 0 + i0$

" " al prodotto è $1 = 1 + i0$

L'opposto di $z = x + iy$ è $-z = -x - iy$

L'opposto di $3 - 2i$ è $-3 + 2i$.

Esistenza del reciproco di $z \neq 0 = 0+0i$

$$z = a+ib$$

$$(a,b) \neq (0,0)$$

Sto cercando $z^{-1} = x+iy$ t.c.

$$z \cdot z^{-1} = 1 = 1+0i$$

x, y incognite

$$(a+ib)(x+iy) = 1$$

$$(ax-by) + i(ay+bx) = 1+0i$$

che corrisponde al sistema

$$\begin{cases} ax-by = 1 & \cdot \quad b \\ ay+bx = 0 & \cdot \quad a \end{cases}$$

N.B. un'equazione nei complessi corrisponde a un sistema di 2 eqⁿⁱ nei reali.

$$\begin{cases} abx - b^2y = b \\ abx + a^2y = 0 \end{cases}$$

$$y(a^2+b^2) = -b$$

$$y = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

N.B. il denom. è diverso da zero
 $(a,b) \neq (0,0)$

$$x = -\frac{a y}{b} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$z^{-1} = x+iy = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

Metodo pratico per trovarla.

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2-(ib)^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

$$\begin{aligned} (2-5i)^{-1} &= \frac{1}{2-5i} = \frac{1 \cdot (2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{2+5i}{4+25} = \frac{2+5i}{29} \\ &= \frac{2}{29} + i \frac{5}{29} \end{aligned}$$

$$\frac{1+i}{3-2i} = \frac{(1+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{(3-2)+i(2+3)}{9+4} = \frac{1+5i}{13} = \frac{1}{13} + i\frac{5}{13}$$

Importante: non esiste un ordinamento dei numeri complessi compatibile con le operazioni.