Permutazione di n elementi distinti: un modo di ordinare questi n elementi.

Numero di permutazioni diverse di n elementi distinti:

$$P_n = n!$$

Disposizione di k elementi presi da n elementi distinti $(k \leq n)$.

= sottoinsieme ordinato di k elementi presi da n elementi distinti

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

oss. $D_{n,n} = P_n = n!$

Combinazione di k elementi presi da n elementi distinti $(n \geq k)$ = sottoinsieme non ordinato di k elementi presi da n elementi distinti.

Quante sono le combinazioni di k elementi presi da n

$$C_{n,k} =$$

consideriamo le disposizioni (sottoinsiemi ordinati)

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Quante disposizioni corrispondono a una stessa combinazione? E' il numero di modi in cui posso riordinare questi k elementi, sarebbe $P_k = k!$

$$\Rightarrow \boxed{C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}}$$ coeff.te binomiale

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

Esempio: Quanti insiemi (non ordinati) diversi di 10 studenti posso prendere da un insieme di 80 studenti.

$$C_{80,10} = \binom{80}{10} = \frac{80!}{10!\,70!} = \frac{80 \cdot 79 \cdot 78 \cdot 77 \cdots 71}{10!}$$

Esempio: Poker (5 card draw).

mazzo di carte con 4 semi ♡♢♠♣ × 8 valori

A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7. = 32 carte

Ogni giocatore riceve 5 carte dal mazzo.

Quante mani diverse di 5 carte può ricevere un giocatore?

Sono $C_{32,5} = \binom{32}{5} = \frac{32!}{5!\,27!} = \frac{32 \cdot 31 \cdot \cancel{30} \cdot 29 \cdot \overset{7}{\cancel{28}}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} =$

$$= 32 \cdot 31 \cdot 29 \cdot 7 = 201.376$$

---

1) Voglio calcolare la probabilità di ricevere un poker servito = 4 carte con lo stesso valore + 1 carta di valore diverso

Devo contare quante mani delle 201.376 possibili contengono un poker

Il numero è: 8 (valore delle 4 carte del poker) ×
28 (la carta che non fa parte del poker

$$\text{Prob(poker)} = \frac{8 \cdot 28}{201.376} = \frac{224}{201.376} \approx \frac{1}{1000}$$

Prob. di avere un "full" servito

full = 3 carte con lo stesso valore + 2 carte dello stesso valore

1 tris + 1 coppia

per es. K, K, K, 10, 10

8 (valore delle carte del tris) $\cdot \binom{4}{3}$ numero dei modi di estrarre 3 carte sulle 4 con quel valore

7 (valore delle carte della coppia) $\cdot \binom{4}{2}$ numero di modi di estrarre 2 carte dalle 4 con quel valore.

$$8 \cdot \underbrace{\frac{4!}{3!\,\cancel{1!}}}_{=4} \cdot 7 \underbrace{\frac{4!}{2!\,2!}}_{=\frac{24}{4}=6} = 8 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6 = 1344.$$

Quindi prob (full) $= \dfrac{1344}{201.000} \approx 0,67\%$

Prob. (tris "e basta") né poker né full.

Calcolo il numero delle mani che contengono un tris e basta

K, K, K, 10, 9

$\boxed{8 \text{ (valore della carta del tris)} \cdot \binom{4}{3}}$ (modi in cui posso scegliere le 3 carte di quel valore)

$\cancel{28}$ 28 (4ª carta) 24 (5ª carta) $\cdot \frac{1}{2}$ (non conta l'ordine dell'estraz. delle ultime 2 carte)

$$\frac{8 \cdot 4 \cdot 28 \cdot 24}{2} = 8 \cdot 4 \cdot 28 \cdot 12 = 10752$$

Prob. di avere un (tris e basta) $= \dfrac{10752}{201.000} \simeq 5\%$

<u>Esercizio:</u> Calcolare le probabilità di:
- ricevere una doppia coppia K, K, Q, Q, 7
- ricevere un tris e basta, cambiare 2 carte e ottenere un poker

---

Perché si chiamano coeff^{ti} binomiali?

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = \underset{\substack{\| \\ \binom{2}{0}}}{1}a^2 + \underset{\substack{\| \\ \binom{2}{1}}}{2}ab + \underset{\substack{\| \\ \binom{2}{2}}}{1}b^2$$

$$\binom{2}{0} = \frac{2!}{0!\,2!} = 1$$

$$(a+b)^3 = \underset{\substack{\| \\ \binom{3}{0}}}{1}a^3 + \underset{\substack{\| \\ \binom{3}{1}}}{3}a^2b + \underset{\substack{\| \\ \binom{3}{2}}}{3}ab^2 + \underset{\substack{\\ \binom{3}{3}}}{1}b^3$$

$$(a+b)^7 = \underset{\substack{\| \\ \binom{7}{0}}}{1}a^7 + \underset{\substack{\| \\ \binom{7}{1}}}{7}a^6b + \underset{\substack{\| \\ \binom{7}{2}}}{21}a^5b^2 + \underset{\substack{\| \\ \binom{7}{3}}}{35}a^4b^3 + \underset{\substack{\| \\ \binom{7}{4}}}{35}a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + \underset{\substack{\\ \binom{7}{7}}}{1}b^7$$

Perché compaiono i coeff^{ti} binomiali, che sono legati alle scelte di sottoinsiemi? Proviamo a calcolare $(a+b)^4$ senza usare la proprietà associativa della moltiplicazione

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b) =$$

$$= aaaa + aaab + aaba + aabb +$$
$$+ abaa + \boxed{abab} + abba + abbb +$$
$$+ baaa + baab + baba + babb +$$
$$+ bbaa + bbab + bbba + bbbb$$

Voglio contare tutti i termini che contengono 2a e 2b.

(perché il numero mi darà il coeff.te di a^2b^2.

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + \dots$$)

Questi termini corrispondono ai modi di scegliere, dai quattro binomi iniziali, i due da cui scegliere b.

Ovviamente la risposta è $\binom{4}{2} = 6$.