

Elementi di calcolo combinatorio

Permutazione di n elementi = un modo di disporre in ordine n elementi distinti tra loro.

E' interessante provare a contare le permutazioni di n elementi.

Esempio: Quante parole diverse di 5 lettere posso formare usando le 5 vocali 1 sola volta:

• AEIOU

• LAUOE

Quante sono le permutazioni?

• 5 possibilità per la prima vocale

• 4 " " " seconda "

• 3 " " " terza "

• 2 " " " quarta "

• 1 " " " quinta "

Le permutazioni sono: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$

In generale le permutazioni di n elementi sono in numero di

$$P_n = n!$$

Esempio In una finale dei 100m (8 atleti)

quanti sono i possibili ordini di arrivo?

sono $P_8 = 8! \simeq 40.000$

Esempio: Quanti sono i possibili anagrammi di
MATEMATICA ?

La prima risposta intuitiva è: $10!$ ma quella è errata perché i 10 elementi non sono tutti distinti (3A, 2T, 2M)

1° passo: rendo le lettere tutte distinte tra loro.

M A T E M A T I C A

_{1 1 1 2 2 2 3}

In questo caso gli anagrammi sono $10!$

Pero' in realtà ci sono diversi di questi anagrammi che corrispondono allo stesso anagramma vero.

Per esempio i due anagrammi

M M A T C I A E A T

_{1 2 2 2 3 1 1}

M M A T C I A E A T

_{1 2 2 1 3 1 2}

Quindi, dato uno di questi anagrammi, in realtà ce ne sono altri che ho contato separatamente, ma che corrispondono alla stessa parola. Quanti sono?

In quanti modo posso scambiare tra loro le T? $2 = 2! = P_2$
" " " " " " M? $2 = 2! = P_2$
" " " " " " A? $6 = 3! = P_3$

Quindi ci sono $2! \cdot 2! \cdot 3!$ anagrammi con le lettere distinte che corrispondono alla stessa parola.

Numero degli anagrammi è :

$$\frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{6}} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

Numero degli anagrammi di ANAGRAMMA =

$$= \frac{9!}{4! \cdot 2!}$$

← numero delle A ← numero delle M.

Disposizione di k elementi su n elementi dati
 (oppure: di n elementi presi k per volta) ($k \leq n$)
 = un sottoinsieme ordinato di k elementi presi da n elementi distinti.

Esempio: disposizioni di parole di 3 lettere costruite con le 5 vocali senza ripeterle.

• AIO • EAI

Quante sono?

5 = numero di possibilità di scelta della prima vocale
 4 = " " seconda "
 3 = " " terza

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!}$$

In generale il numero di disposizioni di k elementi presi da n è

$$\begin{aligned} D_{n,k} &= n \cdot (n-1)(n-2) \dots (n-k+1) = \\ &= \frac{n \cdot (n-1)(n-2) \dots (n-k+1)(n-k)(n-k-1) \dots 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1) \dots 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Esempio: Finale dei 100 m (8 corridori).

In quanti modi diversi posso distribuire le tre medaglie (oro, argento, bronzo)?

Risposta: $D_{8,3} = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

