

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^n \binom{-1/2}{k} x^k + o(x^n) = \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\left[\text{dove } \binom{-1/2}{k} = \frac{(-1/2)(-3/2) \dots (-1/2 - k + 1)}{k!} \right]$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \dots + \binom{-1/2}{n} x^n + o(x^n)$$

$$\binom{-1/2}{2} = \frac{(-1/2)(-3/2)}{2} = \frac{3}{8}$$

Mettiamo $-x^2$ al posto di x

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} \begin{cases} + o(x^{2n}) \\ + o(x^{2n+1}) \end{cases} \quad x \rightarrow 0$$

$T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x)$

Osserviamo ora che $D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$

$$\arcsin x = \cancel{\arcsin 0} + \sum_{k=0}^n \underbrace{(-1)^k \binom{-1/2}{k}}_{T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \quad x \rightarrow 0$$

Si dimostra facilmente che lo sviluppo può essere riscritto così.

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) \quad x \rightarrow 0$$

Esercizio: dimostrare che
$$(-1)^k \binom{-1/2}{k} = \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$$
 per caso.

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$x \rightarrow 0$.

Esercizio: trovare lo sviluppo di Maclaurin di $f(x) = \operatorname{tg} x$ di ordine 5

1° modo: Calcolare le derivate di $\operatorname{tg} x$.

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

$$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$f''(x) = 2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) = 2(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x)$$

ecc.

2° modo

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} =$$

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + o(t^3) \quad t \rightarrow 0$$

$$t = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) \frac{1}{\cos x} =$$

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right)}_{t \rightarrow 0}} = 1 + \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right)}_t +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right)^2}_{t^2} + \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right)^3}_{o(x^5)} + o(x^5) =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) + \frac{x^4}{4} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24} x^4 + o(x^5)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24} x^4 + o(x^5) \right)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{5}{24} x^5 =$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5)$$

$$\frac{1}{120} - \frac{1}{12} + \frac{5}{24} = \frac{1 - 10 + 25}{120} = \frac{16}{120} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

Per l'unicità del polinomio $T_5(x)$ t.c. $f(x) - T_5(x) = o(x^5)$,
questo deve essere il polinomio di Maclaurin di grado 5,
anzi 6.

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \rightarrow 0$, di
 $f(x) = 3 \operatorname{tg} x - 3x - x^3$

1° modo Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} x - 3x - x^3}{x^\alpha} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{3} + \cancel{3 \operatorname{tg}^2 x} - \cancel{3} - 3x^2}{\alpha x^{\alpha-1}} =$$

$\alpha > 0$

(già fatto!)

2° modo Taylor.

$$\begin{aligned} 3\lg x - 3x - x^3 &= 3\left(\cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{3}} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)\right) - \cancel{3x} - \cancel{x^3} = \\ &= \frac{2}{5}x^5 + o(x^5) \sim \frac{2}{5}x^5 \quad \text{infinitesimo di ordine 5.} \end{aligned}$$

Trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \rightarrow +\infty$, di

$$f(x) = e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =$$

$$= e - e^{\underbrace{x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}_{\downarrow 1}} = e \left(1 - e^{\boxed{x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1}}\right) \sim$$

oss $e^t - 1 \sim t$

per $t \rightarrow 0$

$$\sim e \left(-x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 1\right) =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{oss} \quad \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad t \rightarrow 0 \\ \quad \quad \quad t = \frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \\ \Rightarrow \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad x \rightarrow +\infty \end{array} \right]$$

$$= e \left(-x \left[\cancel{\frac{1}{x}} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] + \cancel{1}\right) =$$

$$= e \left(\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \sim \frac{e}{2x} \quad \text{infinitesimo di ordine 1.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2 + \log(\cos x)}{x^4} = \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{\sim -\frac{x^4}{12}}{=} -\frac{1}{12}$$

Provare con l'Hopital. Noi usiamo Taylor.

$$\frac{1}{2}x^2 + \log(\cos x) = \frac{x^2}{2} + \log\left(1 + \underbrace{(\cos x - 1)}_{t \rightarrow 0}\right) =$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad t \rightarrow 0$$

$$= \frac{x^2}{2} + (\cos x - 1) - \frac{1}{2}(\cos x - 1)^2 + \underbrace{o((\cos x - 1)^2)}_{o(x^4)} =$$

$$\boxed{\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}$$

perché
 $(\cos x - 1)^2 \sim \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2$

$$= \cancel{\frac{x^2}{2}} + \left(-\cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{4} \right) =$$

$$= x^4 \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8} \right) + o(x^4) = -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \sim -\frac{1}{12}x^4$$

Il seguente ragionamento sarebbe errato.

$$\log(\cos x) = \log\left(1 + (\cos x - 1)\right) \stackrel{\sim}{\sim} \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\Rightarrow \log(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Errato. perché abbiamo trascurato il termine di ordine 2 del $\log(1+t)$

Applicazione del polinomio di Taylor alla classificazione dei pti critici.

Se x_0 è un punto critico di f ($f'(x_0) = 0$),

x_0 potrebbe essere:

- min locale (per es. $x_0 = 0$ se $f(x) = x^2$)
- max locale (per es. $x_0 = 0$ se $f(x) = -x^2$)
- né max né min. (per es. $x_0 = 0$ se $f(x) = x^3$)

Come si capisce? Di solito si studia il segno di f' intorno a x_0

Se per esempio $f'(x_0) > 0$ in un intorno sinistro di x_0
 < 0 " " " " destro di x
 $\Rightarrow x_0$ è pto di max. locale.

Un altro modo è quello di calcolare le derivate successive in x_0

TEOREMA $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$.

Sia $n \geq 2$, e sia f derivabile n volte in x_0 , con

$$f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Allora:

1) se n è pari $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{se } f^{(n)}(x_0) > 0, \text{ allora } x_0 \text{ è un pto di min} \\ \text{locale stretto} \\ \text{se } f^{(n)}(x_0) < 0, \text{ allora } x_0 \text{ è un pto di max} \\ \text{locale stretto.} \end{cases}$

2) se n è dispari $\Rightarrow x_0$ non è né di max né di min. locale
• inoltre x_0 è un pto di flesso.
a tg orizzontale

x_0 si dice pto di ^{max} min. locale stretto per f se
 $\exists$ un intorno U di x_0 t.c. $f(x_0) < f(x) \forall x \in U \cap \text{dom } f \setminus \{x_0\}$

Dim. teorema.

Basta scrivere lo sviluppo di Taylor in x_0 .

$$f(x) = f(x_0) + \cancel{f'(x_0)(x-x_0)} + \cancel{\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2} + \dots + \cancel{\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \quad x \rightarrow x_0$$

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) = \\ &= (x-x_0)^n \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right] \end{aligned}$$

Supponiamo n pari.

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{(x-x_0)^n}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ se } x \neq x_0}} \left[\underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1)}_{\substack{\text{ha lo stesso segno di } f^{(n)}(x_0) \\ \text{se } x \text{ è abbastanza vicino a } x_0}} \right]$$

Quindi, se $f^{(n)}(x_0) > 0$,

$f(x) - f(x_0) > 0 \quad \text{def}^{\text{te}} \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \Rightarrow \text{min locale stretto}$

se $f^{(n)}(x_0) < 0$

$f(x) - f(x_0) < 0 \quad \text{def}^{\text{te}} \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \Rightarrow \text{max. locale stretto}$

Se invece n è dispari

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{(x - x_0)^n}_{\text{ha lo stesso segno di } x - x_0} \left[\underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{\text{ha lo stesso segno di } f^{(n)}(x_0) \text{ se } x \text{ è vicino a } x_0} + o(1) \right]$$

$\Rightarrow f(x) - f(x_0)$ cambia segno attraversando x_0

$\Rightarrow$ né max né minimo.

Per vedere che x_0 è un flesso, scriviamo lo sviluppo di Taylor di $f''(x)$.

$$f''(x) = \cancel{f''(x_0)} + \cancel{\dots} + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + o((x - x_0)^{n-2})$$

$$f''(x) = \underbrace{(x - x_0)^{n-2}}_{\text{cambia segno attraversando } x_0} \left[\underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}}_{\text{def. il segno di } f^{(n)}(x_0)} + o(1) \right]$$

$\Rightarrow x_0$ è un flesso.

□

Uso del polinomio di Taylor per il calcolo approssimato di funzioni.

Finora abbiamo usato il polinomio di Taylor facendo tendere x a x_0 (il punto dello sviluppo).
 $\nearrow$ il pto in cui calcoliamo $T_n(x)$

$$f(x) = T_n(x) + E_n(x)$$

questo definisce $E_n(x)$
(errore)

$$E_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

Abbiamo usato la proprietà $E_n(x) = o((x-x_0)^n)$ $x \rightarrow x_0$

Invece useremo un approccio diverso.

x_0 e x sono due pti fissi, a una certa distanza tra loro, e mi chiedo cosa succede di $E_n(x)$ quando $n \rightarrow +\infty$?

Esempio

$$x_0=0 \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + E_n(x)$$

$$x=1$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + E_n(1)$$

Mi chiedo se $E_n(1) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$

TEOREMA (resto di Lagrange del polinomio di Taylor)

$f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte in (a,b) .

Siano $x_0, x \in (a,b)$, $x \neq x_0$, e sia

$$E_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

dove $T_n(x)$ è il polinomio di Taylor di f di ordine n e centro x_0

Allora $\exists c$ compreso tra x e x_0 t.c.

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Quindi

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Se $\boxed{n=0}$ è un risultato a noi già noto:

$\exists c$ compreso tra x e x_0 t.c.

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{T_0(x)} + \frac{f'(c)}{1!} (x-x_0)^1$$

è il teor. di Lagrange.