

TEOREMA di PEANO

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in (a, b)$.

Sia $T_n(x)$ il polinomio di Taylor con punto iniziale x_0 di $f(x)$ di ordine n , cioè

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) (x-x_0)^k}{k!}$$

Allora

$$f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \quad (*)$$

Ciò $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \quad (**)$

Inoltre $T_n(x)$ è l'unico polinomio di grado $\leq n$ che verifica (*).

L'unicità segue dalla dm: a ogni passaggio ho scelto prima a_0 , poi $a_1, \dots$ fino ad a_n . Ogni altra scelta di questi coefft darebbe dato come limite per $x \rightarrow x_0^+$ di (**) un risultato diverso da zero.

Trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \rightarrow 0$, di

$$f(x) = 1 - \cos x \cosh x$$

2 modi:

1° modo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^\alpha}$ con l'Hôpital (ripetuto)

si trova a t.c. il limite sia finito e non nullo.

2° modo con il polinomio di Maclaurin.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

per $x \rightarrow 0$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$1 - \cos x \cosh x = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{48} + \frac{x^2}{2} o(x^5) +$$

$o(x^7)$
 $o(x^5)$

$$- \frac{x^4}{24} =$$

$$= x^4 \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} \right) + o(x^5) = \frac{x^4}{6} + o(x^5) \sim \frac{x^4}{6}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

infinitesimo di ordine 4.

Trovare il polinomio di Maclaurin di ordine 10 di
 $f(x) = \sin(x^2)$

1° modo. Calcolo $f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(10)}(x)$
 e poi $f(0), f'(0), f''(0), \dots, f^{(10)}(0)$
 e scrivo il polinomio di Maclaurin

$$f'(x) = 2x \cos(x^2), \quad f''(x) = 2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2)$$

(Faticoso e inefficiente)

2° modo. Ricordo che $\overbrace{\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^6)}^{(*)} \quad t \rightarrow 0$

OSS. Quando $x \rightarrow 0$, $x^2 \rightarrow 0$, quindi posso porre $t = x^2$ in $(*)$

$$\sin(x^2) = x^2 - \underbrace{\frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120}}_{P_{10}(x)} + o(x^{12}) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Ho trovato un polinomio di grado $10 \leq 12$ t.c. $f(x) - P(x) = o(x^{12})$ per $x \rightarrow 0$, quindi (unicità del polinomio di Taylor) questo è il polinomio di Taylor di grado 12, e quindi anche quello di grado 10.

Questo metodo ci permette di dire, per es., quanto vale $f^{(8)}(0)$, e quanto vale $f^{(10)}(0)$?

$$f^{(8)}(0) = 0, \quad \text{perché} \quad \frac{f^{(8)}(0)}{8!} = a_8 = 0$$

$$f^{(10)}(0) = a_{10} \cdot 10!, \quad \text{perché} \quad \frac{f^{(10)}(0)}{10!} = a_{10} = \frac{1}{120}$$

$$f^{(16)}(0) = \frac{1}{120} \cdot 10! = \frac{10!}{5!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$$

OSS Lo sviluppo di Maclaurin ($x_0 = 0$) di una funzione dispari è composto da sole potenze dispari.

Dim f dispari $\Rightarrow f(0) = 0$

$$\Downarrow$$

f' pari

$$\Downarrow$$

f'' dispari $\Rightarrow f''(0) = 0$

$f^{(4)}$ pari

$\Downarrow$

$f^{(4)}$ dispari $\Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$

etc...

□

Calcolare lo sviluppo di Maclaurin di $(\alpha \in \mathbb{R})$

$$f(x) = (1+x)^\alpha \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \alpha (1+x)^{\alpha-1} \quad f'(0) = \alpha$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$

$\vdots$

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} =: \binom{\alpha}{k}$$

coeff^{te} binomiale generalizzato

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{k} x^k + \dots$$
$$+ \dots + \binom{\alpha}{m} x^m + o(x^m) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^m \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^m) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

dove $\binom{\alpha}{0} = 1$ per definizione

Per es. se $\alpha = 1/2$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \dots + \binom{1/2}{n} x^n + o(x^n)$$

$x \rightarrow 0$

$$\binom{1/2}{2} = \frac{1/2 \cdot (-1/2)}{2} = -\frac{1}{8}$$

$$\binom{1/2}{3} = \frac{1/2 \cdot (-1/2) \cdot (-3/2)}{3!} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$$

OSS se $\alpha = m \in \mathbb{N}_+$ (per es. $m = 5$)

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5 + 0 + 0 + 0.$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10, \quad \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10, \quad \binom{5}{4} = 5$$

$$\binom{5}{5} = 1, \quad \binom{5}{6} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0}{6!} = 0, \quad \binom{5}{7} = 0 \text{ ecc.}$$

a posteriori è ovvio, perché $(1+x)^5$ è già un polinomio di grado 5 e abbiamo ritrovato lo sviluppo del binomio di Newton.

Sviluppo di Maclaurin di $f(x) = \frac{1}{1-x}$ $f(0) = 1$

$$f'(x) = + \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f'(0) = 1.$$

$$f''(x) = + \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f''(0) = 2.$$

$$f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$$

$$f'''(0) = 6 = 3 \cdot 2 = 3!$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1-x)^5}$$

$$f^{(4)}(0) = 4!$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

$$f^{(k)}(0) = k!$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{k!}{k!} = 1.$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^m + o(x^m) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$= \sum_{k=0}^m x^k + o(x^m)$$

si può scrivere esplicitamente

$$E_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$E_n(x) := f(x) - T_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Voglio provare che

$$\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 - x^3 - \dots - x^n \stackrel{?}{=} \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Dm.

$$1 - x^{n+1} \stackrel{?}{=} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)(1-x)$$

$$\begin{array}{r} 1 + \cancel{x} + \cancel{x^2} + \cancel{x^3} + \dots + \cancel{x^n} \\ - \cancel{x} - \cancel{x^2} - \cancel{x^3} - \dots - \cancel{x^n} - x^{n+1} \end{array}$$

ok!

Nel precedente sviluppo di Maclaurin, metto $-x$ al posto di x

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \quad x \rightarrow 0$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$$

mettendo x^2 al posto di x , si ottiene

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \cancel{o(x^{2n})} + o(x^{2n+1})$$

$T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x)$

Polinomio di Maclaurin di ordine 3 di

$$f(x) = \underbrace{e^{2x}}_{1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{6} + o(x^3)} - 3 \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 1 - x + 2x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \quad \frac{4}{3} + \frac{3}{6} =$$

Generalizziamo: detto $T_n(x; f)$ il polinomio di Taylor d'ordine n di $f(x)$ centrato in x_0 ,

$$T_n(x; \alpha f + \beta g) = \alpha T_n(x; f) + \beta T_n(x; g)$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (\text{linearità del polinomio di Taylor})$

$$\begin{aligned} (T_n(x; f))' &= \left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right)' = \\ &= f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \\ &= T_{n-1}(x; f') \end{aligned}$$

cioè: la derivata del polinomio di Taylor è il polinomio di Taylor della derivata.

$$f(x) = \log(1+x) \quad \text{Trovare il polinomio di Maclaurin}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o(x^{n-1}) \quad x \rightarrow 0$$

$$\log(1+x) = \underset{\substack{\uparrow \\ f(0)}}{0} + \text{qui comporre uno sviluppo che, derivato, fornisce quello della riga sopra}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{\overset{h-1}{\circlearrowleft k}} \overset{h}{\circlearrowleft k+1} X^{\overset{h}{\circlearrowleft k+1}}}{\underset{\substack{\downarrow \\ h}}{k+1}} + o(x^n) =$$

$$= \sum_{h=1}^n (-1)^{h-1} \frac{x^h}{h} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\log(1-x) = - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n) =$$

$$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

$$\operatorname{arctg} x = ?$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1}) \quad x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} x = \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{\operatorname{arctg} 0} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \quad x \rightarrow 0$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$