Sapienza Università di Roma

Corso di Laurea in Biotecnologie Agro–Industriali
Prova scritta di Fisica - A.A. 2014-15 - 9 aprile 2015

(1) Un'automobile che sta viaggiando su una strada inizia ad accelerare uniformemente coprendo, in 4 s, una distanza di 32 m e, nei successivi 4 s, una distanza di 56 m. Calcola la velocità iniziale dell'automobile.

(2) Una mole di gas perfetto passa da uno stato in cui occupa un volume di 5 ℓ a una pressione di 2×10^5 Pa, a uno stato in cui il volume è quadruplicato e la pressione è diminuita fino a 0.5×10^5 Pa, secondo una trasformazione reversibile che, sul piano di Clapeyron, si rappresenta come una retta. Qual è la massima temperatura raggiunta dal gas durante la trasformazione?

(3) Un circuito è formato disponendo in serie un generatore di ddp e due resistori di resistenza $R = 1$ MΩ. Misurando con un voltmetro di resistenza interna $r = 0.5\,\mathrm{M}\Omega$ la ddp ai capi di una delle due resistenze si legge il valore $V = 6$ V. Quanto vale la ddp ai capi di questa resistenza se il voltmetro è assente?

(1) Dal momento che i dati sono tutti in unità SI possiamo iniziare subito a pensare alla soluzione del problema. Il fatto che la domanda consista nel calcolare la velocità iniziale dell'automobile ci fa capire che l'automobile non è ferma all'istante in cui inizia ad accelerare (e del resto non era detto nulla sullo stato di moto iniziale, quindi dobbiamo assumere quello piú generale possibile). Se all'istante iniziale $t = 0$ l'automobile inizia ad accelerare uniformemente la sua velocità aumenta progressivamente, quindi è chiaro che nello stesso intervallo di tempo percorre spazi diversi. L'equazione del moto di un oggetto che accelera uniformemente è

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \,.$$

Poniamo $x(t = 0) = x_0 = 0$ per cui

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \,.$$

In un tempo $t_1 = 4$ s la coordinata raggiunta dall'automobile è

$$x_1 = 32\,\mathrm{m} = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2$$

e la sua velocità sarà

$$v(t_1) = v_1 = v_0 + a t_1 \,.$$

Trascorso un ulteriore tempo t_1 lo spazio percorso è $x_2 = 56$ m e vale la relazione

$$x_2 = v_1 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 = (v_0 + a t_1) t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 \,.$$

Sottraendo membro a membro otteniamo

$$x_2 - x_1 = (v_0 + a t_1) t_1 - v_0 t_1 = a t_1^2$$

da cui si ricava che

$$a = \frac{x_2 - x_1}{t_1^2} = \frac{56 - 32}{16} = 1.5\,\mathrm{ms}^{-2} \,.$$

Possiamo cosí ricavare v_0 dall'equazione che dà x_0:

$$v_0 = \frac{x_1 - \frac{1}{2} a t_1^2}{t_1} = \frac{x_1}{t_1} - \frac{a t_1}{2} = \frac{32}{4} - \frac{1.5 \times 4}{2} = 5\,\mathrm{ms}^{-1}$$

(2) Il gas perfetto che subisce una trasformazione reversibile è soggetto alla legge di stato secondo la quale

$$pV = nRT$$

per cui la sua temperatura è, a ogni istante

$$T = \frac{pV}{nR} \,.$$

Poiché la pressione, per quanto detto nel testo, è legata al volume da una relazione lineare secondo la quale $p = \alpha + \beta V$ possiamo scrivere che

$$T = \frac{\alpha V + \beta V^2}{nR}\,.$$

Dalla relazione si capisce che T in funzione di V rappresenta una parabola la cui concavità è rivolta verso il basso. I valori di α e β, infatti, devono essere $\alpha > 0$ perché la pressione è necessariamente positiva e $\beta < 0$ perché la pressione diminuisce all'aumentare di V quindi nel piano la retta che rappresenta la trasformazione ha pendenza negativa. Evidentemente, se il vertice della parabola è compreso nell'intervallo $[V_1, V_2]$ della trasformazione, il massimo valore di T si raggiunge quando la derivata di T rispetto a V si annulla, altrimenti si ottiene a uno degli estremi dell'intervallo di volume. Nella prima ipotesi abbiamo che il massimo si raggiunge quando

$$\frac{dT}{dV} = \frac{\alpha + 2\beta V}{nR} = 0$$

cioè per

$$V = -\frac{\alpha}{2\beta}\,.$$

Per calcolare α e β basta osservare che

$$\beta = \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} = \frac{0.5 - 2}{20 - 5} \times 10^5 = -10^4\,\mathrm{Pa}\,\ell^{-1}\,.$$

mentre $\alpha = p_1 - \beta V_1 = (2 + 0.1 \times 5) \times 10^5 = 2.5 \times 10^5$ Pa. Si ottiene perciò che il massimo di T è raggiunto quando

$$V = \frac{2.5 \times 10^5}{2 \times 10^4} = 12.5\,\ell$$

che effettivamente è compreso nell'intervallo dei volumi indicato dal testo. Per questo volume la pressione del gas è

$$p = \alpha + \beta V = 2.5 \times 10^5 - 10^4 \times 12.5 = 1.25 \times 10^5\,\mathrm{Pa}\,.$$

Quindi la massima temperatura raggiunta è di

$$T_{max} = \frac{pV}{nR} = \frac{1.25 \times 10^5 \times 12.5 \times 10^{-3}}{1 \times 8.31} \simeq 188\,\mathrm{K}\,.$$

Notate che abbiamo dovuto moltiplicare il volume espresso in litri per 10^{-3} per averlo in m^3, al fine di usare il valore $R = 8.31$ in unità SI.

(3) Quando si inserisce il voltmetro nel circuito, la sua configurazione cambia: invece di essere formato dalla serie di due resistenza collegate al generatore, è fatto dal parallelo di r e R, di resistenza R_p, in serie a R. La ddp che si legge ai capi di una resistenza in presenza del voltmetro è, per la legge di Ohm:

$$V = R_p I$$

dove I è la corrente che scorre nel circuito:

$$I = \frac{E}{R + R_p}$$

dove E è la ddp ai capi del generatore. Possiamo cosí trovare il valore di E risolvendo la

$$V = R_p \frac{E}{R + R_p}$$

per la quale

$$E = \frac{V}{R_p} \left(R + R_p\right) \,.$$

Il valore di R_p si calcola ricordando che

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{1}{1} + \frac{1}{0.5} = 1 + 2 = 3\,\mathrm{M\Omega}^{-1}$$

per cui $R_p = \frac{1}{3}\,\mathrm{M\Omega}$. Abbiamo dunque

$$E = \frac{6}{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{1}{3}\right) = 24\,\mathrm{V}\,.$$

In assenza del voltmetro il circuito sarebbe costituito dalla semplice serie delle due resistenze perciò la ddp ai capi di una di esse è banalmente la metà di E pari a 12 V.