

ESERCIZIO 1

①

Consideriamo il problema in assenza di spin.
Il problema è separabile e lo spettro si ottiene combinando i risultati per tre buche 1D di larghezze $L, L, L/2$

Bucca larghezza L $E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} n^2$ $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi n x}{L}$

Bucca larghezza $L/2$ $E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{4\pi^2}{L^2} n^2$ $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi n x}{L}$

Quindi lo spettro è

$$E_{nmp} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} (n^2 + m^2 + 4p^2) = E_0 (n^2 + m^2 + 4p^2) \quad n, m, p: 1, 2, \dots$$

$$\Psi_{nmp} = \cancel{\psi_n(x)} \cancel{\psi_m(y)} \cancel{\phi_p(z)} = \psi_n(x) \psi_m(y) \phi_p(z)$$

Primi livelli

$$E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$$

SF (n, m, p)
 $(1, 1, 1)$ $E = 6 E_0$ non deg.

I ecc $\begin{cases} (2, 1, 1) \\ (1, 2, 1) \end{cases}$ $E = 9 E_0$ 2 deg.

II ecc $\begin{cases} (2, 2, 1) \\ (1, 1, 2) \end{cases}$ $E = 12 E_0$ non deg.

III ecc $\begin{cases} (3, 1, 1) \\ (1, 3, 1) \end{cases}$ $E = 14 E_0$ 2 deg.

In presenza di spin è sufficiente moltiplicare le funzioni spaziali per le funzioni di spin. Una base è

$$\Psi_{nmp}(x, y, z) \left| \frac{3}{2} m \right\rangle \quad m: -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

Quindi

SF $E = 6 E_0$ deg. 4

II ecc $E = 12 E_0$ deg. 4

I ecc $E = 9 E_0$ deg. 8

III ecc $E = 14 E_0$ deg. 8

b) Per l'ortogonalità delle funzioni di spin

(2)

$$\langle \Phi | \Phi \rangle = \frac{1}{3} \int d^3x |f|^2 + |N|^2 \int d^3x |g|^2 = \frac{1}{3} + N^2$$

$$\text{Quindi } N = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Segue } \text{Prob}(S_z = \frac{3}{2}\hbar) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Prob}(S_z = \hbar/2) = \frac{2}{3}$$

c) Riscriviamo le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ in termini delle autofunzioni di buca

$$g(x) = \psi_1(x) \psi_2(y) \phi_1(z) = \psi_{121}(x, y, z) \text{ e' autofunzione di } H$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{8\sqrt{15}}{L^{7/2}} (zL - 2z^2) \frac{L}{2} \left[\sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi z}{L} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi y}{L} \right] \\ &= \frac{4\sqrt{15}}{L^{5/2}} (zL - 2z^2) \psi_2(x) \psi_1(y) \end{aligned}$$

$$\text{Definiamo } F(z) = \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{L}} \left(\frac{z}{L} - \frac{2z^2}{L^2} \right)$$

$$\text{Quindi } f(x, y, z) = \psi_2(x) \psi_1(y) F(z)$$

Per calcolare le probabilità notiamo che

$$|211\rangle | \frac{3}{2} m \rangle \equiv |211m\rangle$$

$$\langle \bar{x} | nmp \rangle = \psi_{nmp}(x, y, z)$$

$$|121\rangle | \frac{3}{2} m \rangle \equiv |121m\rangle$$

sono una base. (con $m = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$)

Quindi

$$\begin{aligned} \text{Prob}(E = 9E_0) &= \sum_m |\langle 211m | \psi \rangle|^2 + \sum_m |\langle 121m | \psi \rangle|^2 \\ &= |\langle 211 \frac{3}{2} | \psi \rangle|^2 + |\langle 211 \frac{1}{2} | \psi \rangle|^2 \\ &\quad + |\langle 121 \frac{3}{2} | \psi \rangle|^2 + |\langle 121 \frac{1}{2} | \psi \rangle|^2 \\ &= |\langle 211 | g \rangle|^2 N^2 + \frac{1}{3} |\langle 211 | f \rangle|^2 \\ &\quad + |\langle 121 | g \rangle|^2 N^2 + \frac{1}{3} |\langle 121 | f \rangle|^2 \end{aligned}$$

Dato che $|g\rangle = |121\rangle$

(3)

$$\langle 211 | g \rangle = 0 \quad \langle 121 | g \rangle = 1$$

Abbiamo poi

$$\begin{aligned} \langle 211 | f \rangle &= \int dx dy dz \psi_2(x) \psi_1(y) \phi_1(z) \psi_2(x) \psi_1(y) F(z) \\ &= \int dx \psi_2(x)^2 \int dy \psi_1(y)^2 \int dz \phi_1(z) F(z) = \int dz \phi_1 F = \\ &= \frac{2}{\sqrt{L}} \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{L}} \int_0^{L/2} dz \left(\frac{z}{L} - \frac{2z^2}{L^2} \right) \sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right) \quad z = \frac{L}{2} \xi \\ &= \frac{8\sqrt{15}}{L} \frac{L}{2} \int_0^1 d\xi \left(\frac{\xi}{2} - \frac{\xi^2}{2} \right) \sin \pi \xi = 2\sqrt{15} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} + \frac{4}{\pi^3} \right) = \frac{8\sqrt{15}}{\pi^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle 121 | f \rangle &= \int dx dy dz \psi_1(x) \psi_2(y) \phi_1(z) \psi_2(x) \psi_1(y) F(z) = \\ &= \int dx \psi_1(x) \psi_2(x) \int dy \psi_2(y) \psi_1(y) \int dz \phi_1(z) F(z) = 0 \end{aligned}$$

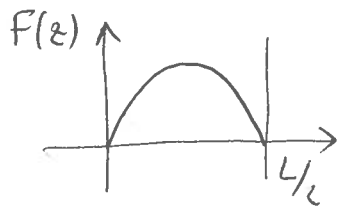
Quindi $\text{Prob} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{64 \cdot 15}{\pi^6} = \frac{2}{3} + \frac{320}{\pi^6}$

d) Per l'ortogonalità delle funzioni di spin

$$\langle \Psi | z | \Psi \rangle = \frac{1}{3} \langle f | z | f \rangle + \frac{2}{3} \langle g | z | g \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle f | z | f \rangle &= \int dx dy dz z \psi_2(x)^2 \psi_1(y)^2 F(z)^2 = \\ &= \int dx \psi_2(x)^2 \int dy \psi_1(y)^2 \int dz z F(z)^2 = \int dz z F(z)^2 = \\ &= \frac{16 \cdot 15}{L} \int_0^{L/2} dz z \left(\frac{z}{L} - \frac{2z^2}{L^2} \right)^2 = \quad z = \frac{L}{2} \xi \\ &= \frac{16 \cdot 15}{L} \cdot \frac{L^3}{4} \int_0^1 d\xi \xi \left(\frac{\xi}{2} - \frac{\xi^2}{2} \right)^2 = \\ &= 15L \int_0^1 d\xi \xi^3 (1 - \xi)^2 = 15L \int_0^1 d\xi (\xi^3 - 2\xi^4 + \xi^5) \\ &= 15L \left[\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \right] = \frac{L}{4} \end{aligned}$$

Il calcolo dell'integrale si poteva anche fare in modo diverso sfruttando la simmetria di $F(z)$



$F(z)$ è simmetrica intorno a $z = \frac{L}{4}$
ossia [formalmente]

$$\begin{aligned} F\left(\frac{L}{2}-z\right) &= \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{L}} \left[\frac{1}{L} \left(\frac{L}{2}-z\right) - \frac{2}{L^2} \left(\frac{L}{2}-z\right)^2 \right] \\ &= \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{L}} \left[\frac{1}{2} - \frac{z}{L} - \frac{2}{L^2} \left(\frac{L^2}{4} - Lz + z^2 \right) \right] \\ &= \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{L}} \left[\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{z}{L} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{2z}{L} + \frac{2z^2}{L^2} \right] \\ &= \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{L}} \left(\frac{z}{L} - \frac{2z^2}{L^2} \right) = F(z) \end{aligned}$$

Questa proprietà
si vede anche
dal grafico

Quindi, se poniamo $x = \frac{L}{2} - z$

$$\int_0^{L/2} dz z F(z)^2 = \int_{L/2}^0 (-dx) \left(\frac{L}{2} - x \right) F(x)^2 =$$

ambio nome $z \rightarrow x$ ↓

$$= \int_0^{L/2} dx \left(\frac{L}{2} - x \right) F(x)^2 = \frac{L}{2} \int_0^{L/2} dx F(x)^2 - \int_0^{L/2} dx x F(x)^2$$

$$\int_0^{L/2} dx x F(x)^2 = \frac{L}{2} \int_0^{L/2} dx F(x)^2 - \int_0^{L/2} dx x F(x)^2$$

Portando il termine $-\int dx F(x)^2 x$ al primo membro otteniamo

$$2 \int_0^{L/2} dx x F(x)^2 = \frac{L}{2} \int_0^{L/2} dx F(x)^2$$

da cui

$$\int_0^{L/2} dx x F(x)^2 = \frac{L}{4} \int_0^{L/2} dx F(x)^2$$

Infine, dato che f è normalizzata abbiamo

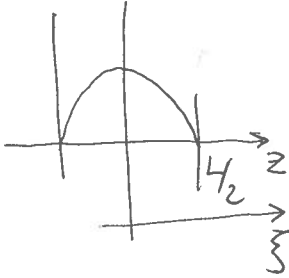
$$1 = \int d^3r |f|^2 = \int dx \underbrace{\psi_2(x)^2}_1 \int dy \underbrace{\psi_1(y)^2}_1 \int dz F(z)^2 = \int dz F(z)^2$$

(5)

Quindi

$$\int_0^{L/2} dx x F(x)^2 = \frac{L}{4} \quad \text{come ottenuto nel calcolo diretto}$$

La simmetria si può pure sfruttare spostando l'origine
[questo è il metodo più rapido]



$$z = \xi + \frac{L}{4}$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\xi) &= F\left(\xi + \frac{L}{4}\right) = \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{L}} \left(\frac{1}{L} \left(\xi + \frac{L}{4}\right) - \frac{2}{L^2} \left(\xi + \frac{L}{4}\right)^2 \right) \\ &= \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{L}} \left[\frac{\xi}{L} + \frac{1}{4} - \frac{2\xi^2}{L^2} - \frac{\xi}{L} + \frac{1}{8} \right] \\ &= \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{L}} \left(\frac{1}{8} - \frac{2\xi^2}{L^2} \right) \end{aligned}$$

da cui segue $\tilde{F}(\xi) = \tilde{F}(-\xi)$. Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^{L/2} dx x F(x)^2 &= \int_{-L/4}^{L/4} d\xi \left(\xi + \frac{L}{4}\right) \tilde{F}(\xi)^2 = \\ &= \frac{L}{4} \int_{-L/4}^{L/4} d\xi \tilde{F}(\xi)^2 + \int_{-L/4}^{L/4} d\xi \xi \tilde{F}(\xi)^2 \\ &= \frac{L}{4} \quad \quad \quad \downarrow \\ & \quad \quad \quad = 0 \text{ per simmetria} \end{aligned}$$

Rimane da calcolare $\langle g | z | g \rangle$

$$\begin{aligned} \langle g | z | g \rangle &= \int d^3x z \psi_1(x)^2 \psi_2(y)^2 \phi_1(z)^2 \\ &= \int dx \underbrace{\psi_1(x)^2}_1 \int dy \underbrace{\psi_2(y)^2}_1 \int dz z \phi_1(z)^2 \\ &= \int dz z \phi_1(z)^2 \end{aligned}$$

Dobbiamo calcolare il valor medio di z sull'autofunzione relativa allo stato fondamentale della buca.
L'approccio più diretto è di nuovo quello di

(6)

spostare l'origine al centro della buca

$$\int_0^{L/2} dz z \phi_1(z)^2 = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} dz z \sin^2 \frac{2\pi z}{L} \quad z = \xi + \frac{L}{4}$$

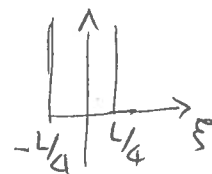
$$= \frac{4}{L} \int_{-L/4}^{L/4} d\xi \left(\xi + \frac{L}{4}\right) \sin^2 \left(\frac{2\pi\xi}{L} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{L} \int_{-L/4}^{L/4} d\xi \underbrace{\xi}_{=0} \sin^2 \left(\frac{2\pi\xi}{L}\right) + \frac{L}{4} \int_{-L/4}^{L/4} d\xi \frac{4}{L} \cos^2 \left(\frac{2\pi\xi}{L}\right)$$

per simmetria

$$= \frac{L}{4} \int_{-L/4}^{L/4} d\xi \underbrace{\frac{4}{L} \cos^2 \left(\frac{2\pi\xi}{L}\right)}_{\text{quadrato dell'autof della buca}}$$

[che è NORMALIZZATA!]



$$= \frac{L}{4}$$

Quindi

$$\langle f | z | f \rangle = \langle g | z | g \rangle = \frac{L}{4} \Rightarrow \langle \psi | z | \psi \rangle = \frac{L}{4}$$

CALCOLO DIRETTO

$$\int_0^{L/2} dz z \phi_1(z)^2 = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} dz z \sin^2 \frac{2\pi z}{L} \quad z = \frac{L}{2} \xi$$

$$= L \int_0^1 d\xi \xi \sin^2 \pi \xi$$

$$= \frac{L}{2} \int_0^1 d\xi \xi (1 - \cos 2\pi \xi)$$

$$= \frac{L}{4} - \frac{L}{2} \int_0^1 d\xi \xi \cos 2\pi \xi$$

$$= \frac{L}{4} - \frac{L}{2} \int_0^1 d\xi \left[\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi}{2\pi} \sin 2\pi \xi \right) - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi \xi \right]$$

$$= \frac{L}{4} - \frac{L}{4\pi} \underbrace{\left[\xi \sin 2\pi \xi \right]_0^1}_{=0} + \frac{L}{4\pi} \int_0^1 d\xi \underbrace{\sin 2\pi \xi}_{=0} = \frac{L}{4}$$

ESERCIZIO 2

7

(a)

Se $\hat{n} = (\cos\alpha, 0, \sin\alpha)$ è un vettore

$$H = \frac{a}{\hbar^2} (\vec{S} \cdot \hat{n})^2$$

$\vec{S} \cdot \hat{n}$ è la componente di $\vec{S}$ lungo $\hat{n}$ e quindi ha autovalori, $-\hbar, 0, +\hbar$, indipendentemente da $\hat{n}$.

Quindi, se $|m\rangle_{\vec{S} \cdot \hat{n}}$ sono le autofunzioni di $\vec{S} \cdot \hat{n}$,

$$m = \pm 1, 0$$

$$H|m\rangle_{\vec{S} \cdot \hat{n}} = am^2$$

STATO FOND $E = 0$ $|0\rangle_{\vec{S} \cdot \hat{n}}$ non deg.

I ecc. $E = a$ $|\pm 1\rangle_{\vec{S} \cdot \hat{n}}$ deg. 2

(b)

Calcoliamo $\vec{S} \cdot \hat{n}$ ed i suoi autovettori. Nella base $|1\rangle_z, |0\rangle_z, |-1\rangle_z$ formati da autovettori di S_z

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ora } \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\vec{S} \cdot \hat{n} = \hbar \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{6}/4 & 0 \\ \sqrt{6}/4 & 0 & \sqrt{6}/4 \\ 0 & \sqrt{6}/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Per $\lambda = (1, 0, -1)\hbar$ ($\lambda = m\hbar$)

(8)

$$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{6}/4 & 0 \\ \sqrt{6}/4 & 0 & \sqrt{6}/4 \\ 0 & \sqrt{6}/4 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{6}}{4}b = am \\ \frac{\sqrt{6}}{4}a + \frac{\sqrt{6}}{4}c = bm \\ \frac{\sqrt{6}}{4}b - \frac{c}{2} = cm \end{cases}$$

① $m=1$

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}b \\ \frac{3c}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}b \end{cases} \Rightarrow v = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}b, b, \frac{\sqrt{6}}{6}b \right) \quad \langle v|v \rangle = |b|^2 \left(\frac{6}{4} + 1 + \frac{1}{6} \right) = \frac{8}{3}|b|^2$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4} \quad v = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

② $m=-1$

$$\begin{cases} -\frac{3a}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}b \\ -\frac{c}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}b \end{cases} \Rightarrow v = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}b, b, -\frac{\sqrt{6}}{2}b \right) \quad \langle v|v \rangle = \frac{8}{3}|b|^2$$

$$b = -\frac{\sqrt{6}}{4} \quad v = \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{3}{4} \right)$$

③ $m=0$

$$\begin{cases} a = -\frac{\sqrt{6}}{2}b \\ c = \frac{\sqrt{6}}{2}b \end{cases} \quad v = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}b, b, \frac{\sqrt{6}}{2}b \right) \quad \langle v|v \rangle = |b|^2 \left(\frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{2} \right) = 4|b|^2$$

$$b = \frac{1}{2} \quad v = \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4} \right)$$

SOMMARIO

$$|1\rangle_{S, \hat{n}} = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

$$|0\rangle_{S, \hat{n}} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4} \right)$$

$$|-1\rangle_{S, \hat{n}} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{3}{4} \right)$$

Questi risultati nella
rappresentazione CANONICA

$$|S_z = \hbar\rangle \rightarrow (1, 0, 0)$$

$$|S_z = 0\rangle \rightarrow (0, 1, 0)$$

$$|S_z = -\hbar\rangle \rightarrow (0, 0, 1)$$

NOTA: $S_2(a, b, c) = \hbar(a, 0, -c)$

c)

(9)

$$|\psi\rangle = s_{\hat{n}} \langle 1|\psi\rangle |1\rangle_{s_{\hat{n}}} + s_{\hat{n}} \langle 0|\psi\rangle |0\rangle_{s_{\hat{n}}} + s_{\hat{n}} \langle -1|\psi\rangle |-1\rangle_{s_{\hat{n}}} \\ = \frac{\sqrt{6}}{4} |1\rangle_{s_{\hat{n}}} + \frac{1}{2} |0\rangle_{s_{\hat{n}}} - \frac{\sqrt{6}}{4} |-1\rangle_{s_{\hat{n}}}$$

$$|\psi t\rangle = \frac{\sqrt{6}}{4} e^{-iat/\hbar} |1\rangle_{s_{\hat{n}}} + \frac{1}{2} |0\rangle_{s_{\hat{n}}} - \frac{\sqrt{6}}{4} e^{-iat/\hbar} |-1\rangle_{s_{\hat{n}}} \\ = e^{-iat/\hbar} \left[\frac{\sqrt{6}}{4} |1\rangle_{s_{\hat{n}}} - \frac{\sqrt{6}}{4} |-1\rangle_{s_{\hat{n}}} \right] + \frac{1}{2} e^{iat/\hbar} |0\rangle_{s_{\hat{n}}}$$

eliminabile

$$\text{Quindi } |\psi t\rangle = \frac{\sqrt{6}}{4} [|1\rangle_{s_{\hat{n}}} - |-1\rangle_{s_{\hat{n}}}] + \frac{1}{2} e^{iat/\hbar} |0\rangle_{s_{\hat{n}}}$$

$$\langle \psi | H | \psi t \rangle = \frac{6}{16} a + \frac{6}{16} a = \frac{3}{4} a$$

Nella rappresentazione canonica di S_z

$$|\psi t\rangle = \frac{\sqrt{6}}{4} \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} e^{iat/\hbar} \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4} \right) - \frac{\sqrt{6}}{4} e^{-iat/\hbar} \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{1}{\hbar} S_z |\psi t\rangle = \frac{\sqrt{6}}{4} \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} e^{iat/\hbar} \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, 0, -\frac{\sqrt{6}}{4} \right) \\ = \frac{\sqrt{6}}{8} (1, 0, 1) - \frac{\sqrt{6}}{8} e^{iat/\hbar} (1, 0, 1) \\ = \frac{\sqrt{6}}{8} (1 - e^{iat/\hbar}) (1, 0, 1)$$

Quindi

$$\langle \psi t | \frac{S_z}{\hbar} | \psi t \rangle = \left[\frac{\sqrt{6}}{4} \langle v_1 | v_3 \rangle + \frac{1}{2} e^{-iat/\hbar} \langle v_2 | v_3 \rangle \right] \frac{\sqrt{6}}{8} (1 - e^{iat/\hbar})$$

$$\text{con } v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2} \right) \quad v_2 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4} \right) \quad v_3 = (1, 0, 1)$$

$$\langle v_1 | v_3 \rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\langle v_2 | v_3 \rangle = -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \langle \psi t | S_z | \psi t \rangle = 0$$

Il valor medio nullo poteva anche essere dedotto osservando

$$\text{che } \text{Prob}(S_z = \hbar) = \text{Prob}(S_z = -\hbar) = \left| \frac{\sqrt{6}}{8} - \frac{\sqrt{6}}{8} e^{iat/\hbar} \right|^2 \left[\begin{array}{l} \text{il valore} \\ \text{non \u00e9} \\ \text{rilevante} \end{array} \right]$$

d)

Lo stato fondamentale è non degenere

$$\langle 0 | S_z | 0 \rangle_{S,n} = \hbar \left(\frac{6}{16} - \frac{6}{16} \right) = 0 \quad \text{NESSUNA CORREZIONE}$$

Il primo eccitato è doppiamente degenere

Abbiamo

$$\langle 1 | S_z | 1 \rangle_{S,n} = \hbar \left(\frac{9}{16} - \frac{1}{16} \right) = \frac{\hbar}{2}$$

$$\langle -1 | S_z | -1 \rangle_{S,n} = \hbar \left(\frac{1}{16} - \frac{9}{16} \right) = -\frac{\hbar}{2}$$

$$\langle 1 | S_z | -1 \rangle_{S,n} = \langle -1 | S_z | 1 \rangle_{S,n} = 0$$

Quindi la matrice della perturbazione è diagonale

$$V = \lambda \begin{pmatrix} \hbar/2 & 0 \\ 0 & -\hbar/2 \end{pmatrix}$$

Il livello si separa  $E = a + \frac{\hbar\lambda}{2}$
 $E = a - \frac{\hbar\lambda}{2}$

La separazione è di ordine $\hbar\lambda$ mentre la distanza tra i livelli unperturbati è $\Delta E = a$

Quindi

$$|\hbar\lambda| \ll a \quad |\lambda| \ll \frac{a}{\hbar}$$