

CONSEGUENZA del Thm. di De L'Hôpital.

Sia f continua in $[x_0, b)$, derivabile in (x_0, b) .

Se esiste $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = l \in \mathbb{R}^*$, allora $f'_+(x_0) = l$.
e similmente per $f'_-(x_0)$

$$\text{Dim } f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{perch\'e } f \text{ \u00e9 continua in } x_0}{=} \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{?}{=} \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{1} = l$$

□

Polinomi di Taylor.

f derivabile ∞ volte in (a, b) , $x_0 \in (a, b)$

0) Qual \u00e8 il polinomio di grado 0 t.c.

$$f(x) - T_0(x) = o(1) \quad \text{per } x \rightarrow x_0?$$

Risp. $T_0(x) = f(x_0)$

1) Qual \u00e8 il polinomio di grado ≤ 1 t.c.

$$f(x) - T_1(x) = o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0?$$

risp. $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

2) Qual \u00e8 il polinomio $T_2(x)$ di grado ≤ 2 t.c.

$$f(x) - T_2(x) = o((x - x_0)^2) \quad \text{per } x \rightarrow x_0?$$

Devo provare che, per un'opportuna scelta dei coefficienti, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0$$

Scriveremo $T_2(x)$ nella forma $T_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_2(x)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\overbrace{f(x)}^{f(x_0)} - \overbrace{a_0}^{f(x_0)} - \overbrace{a_1(x - x_0)}^0 - \overbrace{a_2(x - x_0)^2}^0}{(x - x_0)^2} =$$

affinché il numeratore tenda a zero, devo scegliere $\boxed{a_0 = f(x_0)}$

$$= \left(\frac{0}{0} \right) \underset{H}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\overbrace{f'(x) - a_1}^{f'(x_0) - a_1}}{2(x - x_0)} =$$

devo scegliere $\boxed{a_1 = f'(x_0)}$

$$= \left(\frac{0}{0} \right) \underset{H}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\overbrace{f''(x) - 2a_2}^{f''(x_0) - 2a_2}}{2} = 0$$

scelgo $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$

Ris.

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

3) Qual è il polinomio $T_3(x)$ di grado ≤ 3 t.c.

$$f(x) - T_3(x) = o((x - x_0)^3) \quad \text{per } x \rightarrow x_0?$$

$$\text{Sia } T_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_3(x)}{(x - x_0)^3} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) - a_2(x - x_0)^2 - a_3(x - x_0)^3}{(x - x_0)^3}$$

$$\boxed{a_0 = f(x_0)}$$

$$= \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - a_1 - 2a_2(x - x_0) - 3a_3(x - x_0)^2}{3(x - x_0)^2}$$

$$\xrightarrow{f'(x_0) - a_1}$$

$$\xrightarrow{f''(x_0) - 2a_2}$$

$$\xrightarrow{0}$$

$$\boxed{a_1 = f'(x_0)}$$

$$= \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - 2a_2 - 6a_3(x - x_0)}{6(x - x_0)}$$

$$\xrightarrow{f''(x_0) - 2a_2}$$

$$\xrightarrow{0}$$

$$\boxed{a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}}$$

$$= \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'''(x) - 6a_3}{6} = 0$$

$$\text{se e solo se } a_3 = \frac{f'''(x_0)}{6} = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

2) Qual è il polinomio $T_n(x)$ di grado $\leq n$ t.c.

$$f(x) - T_n(x) = o((x - x_0)^n) \text{ per } x \rightarrow x_0?$$

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - a_1 - 2a_2(x - x_0) - \dots - na_n(x - x_0)^{n-1}}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

$$\boxed{a_0 = f(x_0)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - a_1 - 2a_2(x-x_0) - 3a_3(x-x_0)^2 - \dots - na_n(x-x_0)^{n-1}}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

$$\boxed{a_1 = f'(x_0)} \quad \frac{f''(x) - 2a_2 - 6a_3(x-x_0) - 4 \cdot 3 a_4(x-x_0)^2 + \dots - n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}$$

$$= \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0}$$

$$\boxed{a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}}$$

$$= \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{?}{=} \dots$$

$$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3 \cdot 2} = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

$$\boxed{a_4 = \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}}$$

⋮

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Risposta

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \quad \text{dove } f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$$

Def. Polinomio di Taylor di ordine n .

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$

f sia derivabile n volte nel pto x_0 (questo significa f derivabile $n-1$ volte in un intorno di x_0)

Definiamo il polinomio di Taylor di ordine n di $f(x)$ centrato in x_0 (oppure "con punto iniziale" x_0) il polinomio

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

Esempio: calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 4$ di $f(x) = \sqrt{x}$

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad f(4) = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-1/2} \qquad f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-3/2} = -\frac{1}{4} x^{-3/2} \qquad f''(4) = -\frac{1}{4} 4^{-3/2} = -\frac{1}{32}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-5/2} = \frac{3}{8} x^{-5/2} \qquad f'''(4) = \frac{3}{8} \frac{1}{32} = \frac{3}{256}$$

$$\begin{aligned} T_3(x) &= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{2} \frac{1}{32} (x-4)^2 + \frac{1}{\cancel{6}2} \frac{\cancel{3}}{256} (x-4)^3 = \\ &= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 \end{aligned}$$

$$f(x) - T_3(x) = o((x-4)^3) \qquad \text{per } x \rightarrow 4$$

TEOREMA di PEANO

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in (a, b)$.

Sia $T_n(x)$ il polinomio di Taylor con punto iniziale x_0 di $f(x)$ di ordine n , cioè

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) (x-x_0)^k}{k!}$$

Allora

$$f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0 (*)$$

Cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Inoltre $T_n(x)$ è l'unico polinomio di grado $\leq n$ che verifica (*).

Dim L'abbiamo fatta con l'ipotesi supplementare che f fosse derivabile n volte in un intorno di x_0 con derivata n -esima continua in x_0 . $\square$

OSS Il punto fondamentale della dim. è che il polinomio $T_n(x)$ verifica:

$$T_n(x_0) = f(x_0)$$

$$T_n'(x_0) = f'(x_0)$$

$$T_n''(x_0) = f''(x_0)$$

$\vdots$

$$T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Cerchiamo i polinomi di Taylor delle funzioni elementari
con pto iniziale $x_0 = 0$ (polinomi di Maclaurin)

$$e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1$$

$$T_n(x) = 1 + x$$

Se prendiamo $n=1$ $e^x = \underbrace{1+x}_{T_1(x)} + o(x)$ già noto

$$n > 1$$

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \end{aligned}$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(0) = 0$$

... e così via.

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = T_{2n+2}(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

per $x \rightarrow 0$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f'''(x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = -1$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(0) = 1$$

e poi si ricomincia.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

per $x \rightarrow 0$

$$T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x)$$

per $x \rightarrow 0$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) =$$

$x \rightarrow 0$

$$T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

Uso del polinomio di Taylor nel calcolo dei limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} - \cancel{\sin x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Trovare l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 0$ di

$$f(x) = \sin x + x^2 \cos x - x e^x$$

Uso Taylor

$$\sin x = x + o(x^2)$$

per $x \rightarrow 0$

$$x^2 \cos x = x^2(1 + o(1)) = x^2 + o(x^2) \quad "$$

$$x e^x = x(1 + x + o(x)) = x + x^2 + o(x^2)$$

$$f(x) = \cancel{x} + o(x^2) + \cancel{x^2} - \cancel{x} - \cancel{x^2} = o(x^2) \quad \text{risposta corretta ma insufficiente}$$

Proviamo ad aggiungere altri termini:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$x \rightarrow 0$$

$$x^2 \cos x = x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^5)$$

$$x e^x = x \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) + \cancel{x^2} - \frac{x^4}{2} + \cancel{o(x^5)} - \cancel{x} - \cancel{x^2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} = \\ &= -\frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

$$x \rightarrow 0$$

Infinitesimo di ordine 3.