

TEOREMA di De L'Hôpital

(serve per risolvere f.i. del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$)

f, g derivabili in (a, b) $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

Supponiamo che:

$$1) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 \quad (\text{oppure } \pm\infty)$$

b^- b^-

$$2) g'(x) \neq 0 \quad \text{def}^te \quad \text{per } x \rightarrow a^+$$

b^-

$$3) \exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}^*.$$

b^-

Allora $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

b^-

Dim. nel caso $\frac{0}{0}$ (cioè $f(x)$ e $g(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow a^+$)

1° caso $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 \Rightarrow \text{se estendo } f \text{ per } x=a \text{ così}$$
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (a, b) \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases}$$

$\tilde{f}$ è continua in $[a, b)$

Stessa cosa per g .

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in (a, b) \\ 0 & \text{se } x = a \end{cases}$$

$\Rightarrow \tilde{g}$ è continua in $[a, b)$.

Fissiamo $x \in (a, b)$ e usiamo il teorema di Cauchy nell'intervallo $[a, x]$ alle funzioni $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$.

TEOR. CAUCHY $\tilde{f}, \tilde{g}$ continue in $[a, x]$, derivabili in (a, x)
 $\rightarrow \exists c \in (a, x)$ t.c.
 $\tilde{f}'(c) [\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)] = \tilde{g}'(c) [\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)]$

OSS Notare che $c = c(x)$

Se x è sufficiente vicino ad a , abbiamo $g'(c) \neq 0 \forall c \in (a, x)$

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{\tilde{f}'(c)}{\tilde{g}'(c)}$$

OSS Se fosse $\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a) = 0$, per Rolle esisterebbe $\tilde{c} \in (a, x)$ t.c. $\tilde{g}'(\tilde{c}) = 0$, cosa che abbiamo escluso.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{\tilde{f}'(c(x))}{\tilde{g}'(c(x))} =$$

$c(x) = t \rightarrow a_+$

$a < c(x) < x$ OSS per $x \rightarrow a^+$
 $c(x) \rightarrow a^+$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\tilde{f}'(c(x))}{\tilde{g}'(c(x))} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} =$$

$t = c(x) \rightarrow a^+$

$$= \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{f'(t)}{g'(t)} = l.$$

Caso $a = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(-\frac{1}{t})}{g(-\frac{1}{t})}$$

$t = -\frac{1}{x} \rightarrow 0^+$

applico il risultato appena provato per $a \in \mathbb{R}$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(-\frac{1}{t}) \cdot \frac{1}{t^2}}{g'(-\frac{1}{t}) \cdot \frac{1}{t^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

$\text{passo a } x$
 ∞
 ∞
 ∞

Esercizio Trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \rightarrow 0^+$, di $f(x) = 3\lg x - 3x - x^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\lg x - 3x - x^2}{x^\alpha} = \left(\frac{0}{0}\right) \quad \alpha > 0$$

Hopital

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{3} + 3\lg^2 x - \cancel{3} - 2x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \left(\frac{0}{0}\right) \quad (\alpha > 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6\lg x (1 + \lg^2 x) - 2}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \alpha = 2$$

Risp. infinitesimo di ordine 2.

Stessa cosa per $f(x) = 3\lg x - 3x - x^3$

Stessa impostazione.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\lg x - 3x - x^3}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{3} + 3\lg^2 x - \cancel{3} - 3x^2}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{6\lg x + \lg^3 x - x}{\alpha x^{\alpha-1}} \quad \alpha > 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3(\lg^2 x - x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \left(\frac{0}{0}\right) \quad \alpha > 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3(2\lg x (1 + \lg^2 x) - 2x)}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} =$$

$$\alpha > 2 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6(\cancel{1} + \lg^2 x + 3\lg^2 x (1 + \lg^2 x) - \cancel{1})}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}} =$$

4

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6(4 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg}^4 x)}{\text{idem}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6x^2(4 \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2} + 3 \frac{\operatorname{tg}^4 x}{x^2})}{x(x-1)(x-2)x^{x-3}}$$

$$\stackrel{\alpha=5}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{24 x^2}{5 \cdot 4 \cdot 3 x^2} = \frac{2}{5}$$

Infinitesimo di ordine 5.

OSS 1 Non sempre L'Hôpital è il metodo più conveniente.
 $\sim x^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^4(\sqrt{x})}{\log(1+3x) \sqrt{\arctan x^2}} = \frac{1}{3}.$$

Con L'Hôpital è molto complicato.

$\sim 3x$ $\sim x$

OSS 2 Controllare che sia una f.i. $\frac{0}{0}$ opp. $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2+x}{3+x} \stackrel{?}{\neq} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1} = 1$$

" $\frac{2}{3}$

Non si poteva usare L'Hôpital.

OSS.3 Se non esiste $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, non vuol dire che non esista $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$

Esempio $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) \stackrel{?}{\neq} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{1} \neq$

" $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1$

↓

non vale perché il limite di $\frac{f'}{g'}$ non esiste

OSS 4 Il teorema di De L'Hôpital dice che, sotto opportune ipotesi,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ma non dice che $\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{f'(x)}{g'(x)}$, cosa in generale falsa

Esempio.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

ma $\frac{e^x}{x} \not\sim e^x$ per $x \rightarrow +\infty$

Applicazione dell'Hôpital al calcolo degli asintoti obliqui.

PROP f derivabile in $(a, +\infty)$, supponiamo che
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm \infty$.

$$\text{Se } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = m \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

Dim

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1} = m$$

□

Attenzione: se prendo

$$f(x) = x + \frac{\sin(x^2)}{x}$$

ammette asintoto obl. $y = x$
per $x \rightarrow +\infty$

ma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2x \cdot \cos(x^2) \cdot x - \sin(x^2)}{x^2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\sin(x^2)}{x^2} + \underbrace{2 \cos(x^2)}_{\text{non ha limite}} \right) \neq$$

↓
0

Studio di funzione: $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{|\operatorname{tg} x| - \sqrt{3}}$

Dominio: $\operatorname{tg} x$ deve esistere e deve essere $\neq \pm \sqrt{3}$
 $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad x \neq \pm \frac{\pi}{3} + k\pi. \quad (k \in \mathbb{Z})$

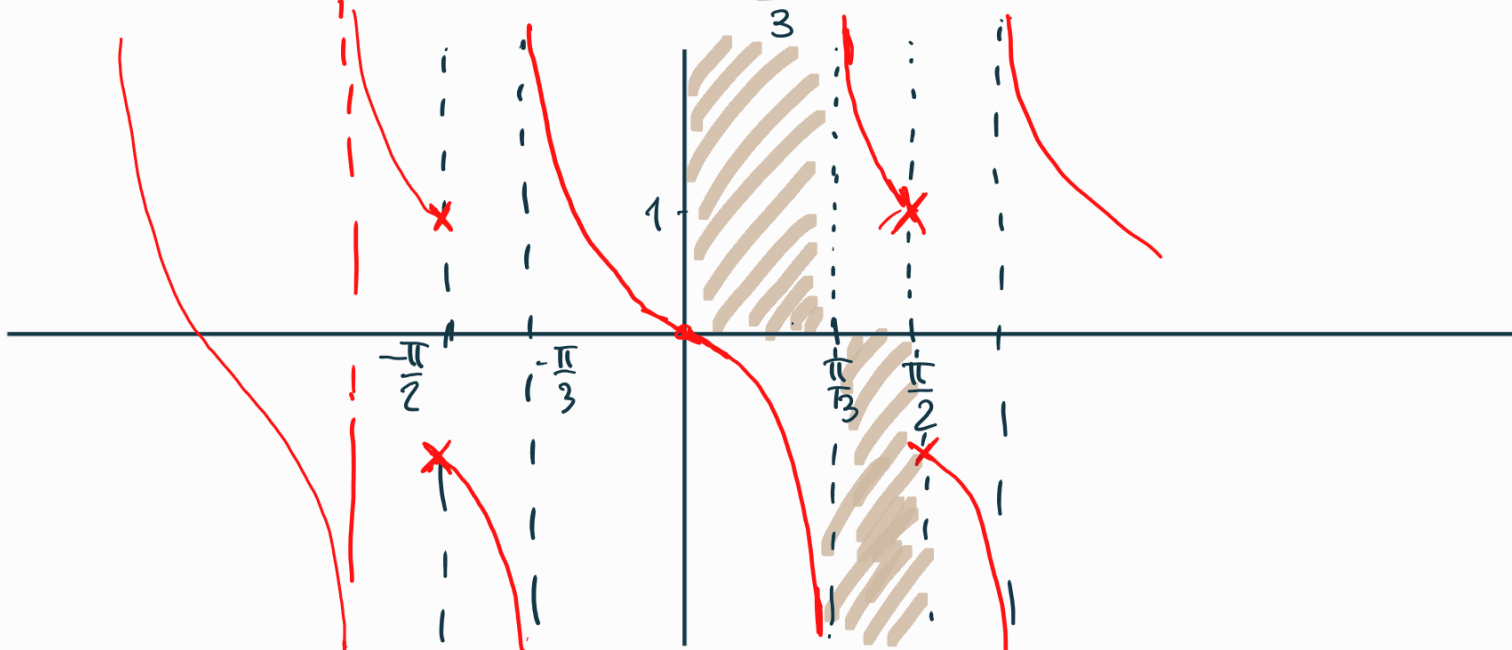
Periodicità e simmetria Dipende solo da $\operatorname{tg} x \Rightarrow$ periodica di periodo π
 $\Rightarrow$ la studio solo in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{\pm \frac{\pi}{3}\}$.

E' dispari $\Rightarrow$ la studio solo in $[0, \frac{\pi}{2}) \setminus \{\frac{\pi}{3}\}$. Qui $\operatorname{tg} x > 0$, quindi tolgo il modulo.

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}) \setminus \{\frac{\pi}{3}\}$$

Segno. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
 $> 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$

$$< 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{3}$$



Continuità e limiti significativi: f è continua nel suo dominio

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \frac{\cancel{\text{tg } x}}{\text{tg } x - \sqrt{3}} = -\infty$$

$\nearrow \sqrt{3}$
 $\downarrow 0^-$

$x = \frac{\pi}{3}$ asint. verticale

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\text{tg } x}{\text{tg } x - \sqrt{3}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{y - \sqrt{3}} = 1$$

$y = \text{tg } x \rightarrow +\infty$

Derivata: Derivabile in $(0, \frac{\pi}{2}) \setminus \{\frac{\pi}{3}\}$

Per $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \setminus \{\frac{\pi}{3}\}$

$$f'(x) = \left(\frac{\text{tg } x}{\text{tg } x - \sqrt{3}} \right)' = \frac{(\cancel{\text{tg } x} - \sqrt{3}) - \cancel{\text{tg } x}}{(\text{tg } x - \sqrt{3})^2} (1 + \text{tg}^2 x) =$$

$$= -\sqrt{3} \frac{(1 + \text{tg}^2 x)}{(\text{tg } x - \sqrt{3})^2} < 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}) \setminus \{\frac{\pi}{3}\}$$

$\Rightarrow f$ ^{strett.} decrescente in $[0, \frac{\pi}{3})$ e in $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

Derivabilità in $x=0$.

$$f'_+(0) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f'_-(0) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\nwarrow f$ dispari

$\Rightarrow f$ derivabile in $x=0$, $f'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Derivate seconde

$$f'(x) = - \frac{\sqrt{3} (\operatorname{tg}^2 x + 1)}{(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})^2} \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}) \setminus \{\frac{\pi}{3}\}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\sqrt{3} \frac{(\cancel{2} \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - \sqrt{3})^{\cancel{2}} - (\operatorname{tg}^2 x + 1) \cancel{2} (\operatorname{tg} x - \sqrt{3})^{\cancel{1}})}{(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})^{\cancel{4} 3}} (1 + \operatorname{tg}^2 x) = \\ &= -2\sqrt{3} \frac{\cancel{\operatorname{tg}^2 x} - \sqrt{3} \operatorname{tg} x - \cancel{\operatorname{tg}^2 x} - 1}{(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})^3} (1 + \operatorname{tg}^2 x) = \\ &= 2\sqrt{3} \frac{(\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1)(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})^3} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \text{mai}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$$

$$< 0 \Leftrightarrow x \in (0, \frac{\pi}{3})$$

f strett. concava in $[0, \frac{\pi}{3})$, strett. convessa in $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

$x=0$ è un flesso, anche se non esiste $f''(0)$.

$$f''_+(0) = -\frac{2}{3}, \quad f''_-(0) = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3 + x^2 + \log(1-x^2)} &= \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\cos x - 1}^{\sim -\frac{x^2}{2}}}{3x^2 + 2x + \frac{-2x}{1-x^2}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 \cdot \overbrace{(1-x^2)}^{\nearrow 1}}{2[3x^2(1-x^2) + 2x(1-x^2) - 2x]} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{2[\underbrace{3x^2 - 3x^4 + \cancel{2x} - 2x^3 - \cancel{2x}}_{\sim 3x^2}]} = -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Polinomi di Taylor

Supponiamo $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile ∞ volte ($C^\infty(a,b)$)
 cioè: quante volte vogliamo

Pb 0) Qual è il polinomio di grado 0 (costante) che meglio approssima f vicino a x_0 ?

$$T_0(x) = f(x_0)$$

È l'unico polinomio di grado zero verificante

$$f(x) = T_0(x) + o(1) \quad x \rightarrow x_0$$

$$f(x) = f(x_0) + o(1)$$

Pb 1) Qual è il polinomio di grado 1 che "meglio approssima" f vicino a x_0 ?

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

retta tangente

E' l'unico polinomio di grado ≤ 1 . t.c.
 $f(x) = T_1(x) + o(x-x_0)$ per $x \rightarrow x_0$
se e: f derivabile in x_0 .

Pb 2) Qual è il polinomio di grado ≤ 2 che meglio approssima f vicino a x_0 ?

Risposta (da vedere)

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$$

E' l'unico polinomio di grado ≤ 2 verificante

$$f(x) = T_2(x) + o((x-x_0)^2) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$