Esame di Meccanica Quantistica 14/11/2025

Esercizio 1. Una particella di spin 3/2 è confinata nel volume

$$V = \{0 \le x \le L,\ 0 \le y \le L,\ 0 \le z \le L/2\}$$

all'interno del quale si muove liberamente.

a) Calcolare i primi 4 livelli energetici, le relative degenerazioni e le corrispondenti autofunzioni.

b) Si consideri al tempo $t = 0$ la seguente funzione d'onda

$$\Psi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{3}} f(\vec{x}) \big|\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\big\rangle + N g(\vec{x}) \big|\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\big\rangle\,,$$

dove N è una costante reale positiva, $|s\, m_s\rangle$ sono autoket di S^2, S_z e la normalizzazione delle funzioni $f(\vec{x})$, $g(\vec{x})$ è tale per cui:

$$\int_V d^3x\, |f(\vec{x})|^2 = 1 = \int_V d^3x\, |g(\vec{x})|^2$$

Si determini la costante N in modo che $\Psi(\vec{x})$ sia normalizzata. Si specifichino i possibili risultati di una misura di S_z e le relative probabilità.

Nelle domande seguenti si consideri:

$$f(\vec{x}) = \frac{8\sqrt{15}}{L^{7/2}} \left(zL - 2z^2\right) \sin\frac{2\pi x}{L} \sin\frac{\pi y}{L} \qquad g(\vec{x}) = \frac{4}{L^{3/2}} \sin\frac{2\pi z}{L} \sin\frac{\pi x}{L} \sin\frac{2\pi y}{L}\,.$$

c) Calcolare la probabilità che una misura dell'energia dia come risultato il valore del primo livello eccitato.

d) Calcolare il valor medio $\langle z\rangle$ sullo stato $\Psi(\vec{x})$.

Integrali utili:

$$\int_0^1 dx\, x \sin(x\pi) = \frac{1}{\pi}\,, \qquad \int_0^1 dx\, x^2 \sin(x\pi) = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}\,.$$

Esercizio 2. Si consideri una particella di spin 1 soggetta alla Hamiltoniana (si consideri solo la parte di spin)

$$H = \frac{a}{\hbar^2}(S_x \cos\alpha + S_z \sin\alpha)^2,$$

dove $a > 0$ ad α sono costanti date.

a) Si determinino i livelli di H e la relativa degenerazione. Si spieghi perchè il risultato non dipende dal parametro α.

b) Si determinino gli autovettori di H in termini di autostati di S_z. Si risponda alle domanda fissando $\alpha = \pi/6$. Si utilizzi tale valore di α anche nelle domande successive.

c) Si consideri l'autostato $|\psi\rangle$ di S_z con autovalore nullo. Si determinino il suo evoluto $|\psi(t)\rangle$ al tempo t ed i valori medi $\langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle$, $\langle\psi(t)|S_z|\psi(t)\rangle$.

d) Viene aggiunta una perturbazione $V = \lambda S_z$. Si calcolino gli autovalori di $H + V$ al primo ordine in λ.
Quale condizione (diseguaglianza) deve soddisfare $|\lambda|$ perchè si possa applicare la teoria perturbativa?