

Abbiamo definito la divisione di polinomi.

Caso particolare: Quando il divisore $Q_m(x) = Q_1(x) = x - a$

In questo caso $R(x)$ deve essere un polinomio di grado < 1 ,
cioè una costante.

Dividere $x^4 - 3x^3 + x - 7$ per $x - 4$.

$$\begin{array}{r} x^4 - 3x^3 \quad + x - 7 \\ -x^4 + 4x^3 \\ \hline x^3 \quad + x - 7 \\ -x^3 + 4x^2 \\ \hline 4x^2 + x - 7 \\ -4x^2 + 16x \\ \hline 17x - 7 \\ -17x + 68 \\ \hline 61 = R_0(x) \end{array} \quad \begin{array}{r} x-4 \\ \hline x^3 + x^2 + 4x + 17 \\ S_3(x) \end{array}$$

$$x^4 - 3x^3 + x - 7 = (x - 4)(x^3 + x^2 + 4x + 17) + 61$$

Di solito in questo caso si usa una forma graficamente diversa

$$\begin{array}{c|cccc|c} & \text{coeff. di } P_4(x) & & & & \\ +a \swarrow & 1 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ \textcircled{4} & & 4 & 4 & 16 & 68 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 17 & 61 \\ & \text{coeff. di } S_3(x) & & & & R_0 \end{array}$$

Regola di Ruffini per la divisibilità per $x - a$.

Un polinomio $P_n(x)$ è divisibile per $(x - a) \iff P_n(a) = 0$

dim $\Rightarrow$ è semplice

$$P_n(x) \text{ divisibile per } (x-a) \Leftrightarrow P_n(x) = (x-a) S_{n-1}(x) \\ \Rightarrow P_n(a) = 0$$

$\Leftarrow$ Supponiamo ora $P_n(a) = 0$

Divido $P_n(x)$ per $(x-a)$ (divisione con il resto).

$$P_n(x) = (x-a) S_{n-1}(x) + R_0$$

se prendo $x=a$,

$$0 = P_n(a) = \cancel{(a-a)} S_{n-1}(a) + R_0 \Rightarrow R_0 = 0 \Rightarrow$$

$P_n(x)$ è divisibile per $x-a$.

Fattorizzazione dei polinomi.

TEOREMA FONDAMENTALE dell' ALGEBRA (nei reali)

Ogni polinomio $P_n(x)$ a coeff^{ti} reali si può fattorizzare nel prodotto di polinomi di grado 1 e polinomi di grado 2 irriducibili (nei reali).

$\rightarrow$ polinomi di 2° grado con $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Quindi:

Un polinomio di grado 3 si può fattorizzare come:

- 1) prodotto di 3 polinomi di grado 1, oppure
- 2) prodotto di 1 polinomio di grado 1 e un polinomio irriducibile di grado 2.

Fattorizziamo $P_3(x) = x^3 + 3x^2 - 25x + 21$.

Sicuramente avrà un fattore del tipo $x-a$

$$P_3(x) = (x-a)(x^2 + bx + c) \quad \text{Quest'ultimo ha come termine noto } -ac = 21$$

Cio' suggerisce di cercare a tra i divisori di 21
 $\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21$.

$$P_3(1) = 1 + 3 - 25 + 21 = 0$$

$\Rightarrow P_3(x)$ è divisibile per $x-1$.

Faccio la divisione

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -25 & 21 \\ 1 & & 1 & 4 & -21 \\ \hline & 1 & 4 & -21 & \end{array}$$

$$P_3(x) = (x-1)(x^2 + 4x - 21)$$

annullo questo.

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+21} = -2 \pm 5 = \begin{cases} -7 \\ +3 \end{cases}$$

$$x^3 + 3x^2 - 25x + 21 = (x-1)(x+7)(x-3)$$

Scomposizione di $P_4(x) = x^4 + 16$

non ha radici reali, quindi si scompone come prodotto di due polinomi di 2^o grado irriducibili.

Cerchiamoli:

$$\underbrace{X^4 + 16 + 8X^2}_{(X^2+4)^2} - 8X^2 = (X^2+4)^2 - (2\sqrt{2}X)^2 =$$

$$= \underbrace{(X^2+4-2\sqrt{2}X)}_{\text{hanno } \Delta < 0} \underbrace{(X^2+4+2\sqrt{2}X)}_{\text{hanno } \Delta < 0}$$

$$\text{hanno } \Delta < 0 \quad A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$

Stessa cosa per $P_6(x) = x^6 + 1$

non ha radici reali $\Rightarrow$ si scompone in 3 polinomi di 2° grado irriducibili.

$$X^6 + 1 =$$

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$= (X^2)^3 + 1^3 = (X^2+1)(X^4 - X^2 + 1) =$$

$$= (X^2+1) \left(\underbrace{X^4 + 1 + 2X^2}_{(X^2+1)^2} - 2X^2 - X^2 \right) =$$

$$= (X^2+1) \left[(X^2+1)^2 - (\sqrt{3}X)^2 \right] =$$

$$= (X^2+1) (X^2 - \sqrt{3}X + 1) (X^2 + \sqrt{3}X + 1)$$