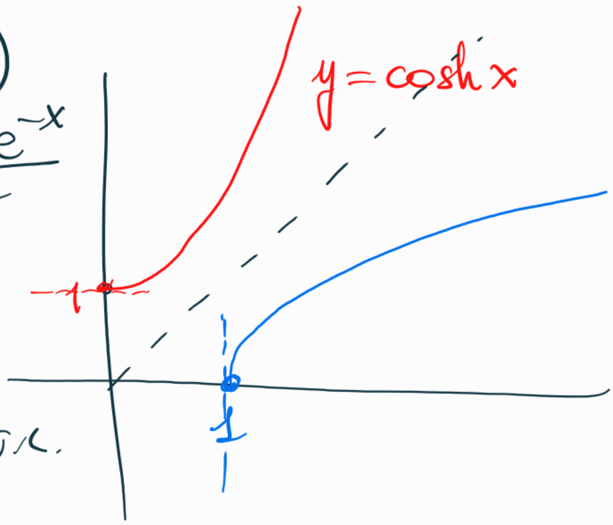
$$\cosh\big|_{[0,+\infty)} : [0,+\infty) \longrightarrow [1,+\infty)$$
$$x \longmapsto \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$



è biettiva.

$$f^{-1} = \text{settcosh} : [1,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$$
$$y \longmapsto \text{l'unico } x \text{ t.c. } \cosh x = y$$

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2} = y \qquad \cdot 2e^x$$

$$e^{2x} + 1 = 2ye^x$$

$$e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2-1}$$

si sceglie il segno "+" altrimenti verrebbe $e^x < 1$.

$$x = \boxed{\text{settcosh } y = \log\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)} \quad \forall y \geq 1$$

$$(\text{settcosh } y)' = \begin{cases} \left(\log\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\right)' & \text{calcolo diretto} \\ \dfrac{1}{(\cosh x)'} = & \text{teor. della derivata di } f^{-1} \end{cases}$$

dove x e y sono legati da
$y = \cosh x$
$x = \text{settcosh } y$.

$$= \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \Rightarrow \sinh x = \pm\sqrt{\cosh^2 x - 1}$$

scelgo il + perché $x>0$
$\Rightarrow \sinh x > 0$.

$$\boxed{(\operatorname{settcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \forall x > 1}$$

Per $x=1$: $f'(1) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty$ pto a tg. verticale

Esercizio per casa:

Studiare la funzione $\boxed{\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}$

Osservare che è invertibile.

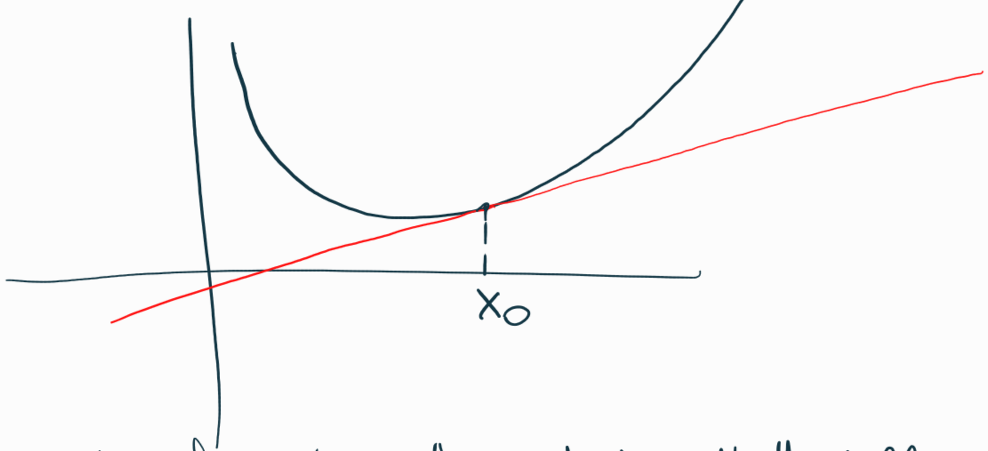
Scrivere esplicitamente la sua funzione inversa settgh y e calcolare la sua derivata

---

Torno sulle f^{ni} concave/convesse.

Sia f convessa in I intervallo (aperto per semplicità)
concava

Sia x_0 un punto in cui f è derivabile.



Allora il grafico di f si trova "non al di sotto" della retta tg.
"non al di sopra"

Algebricamente: $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad \forall x \in I$

$\leq$

La dis. è stretta se f è strett. convessa e $x \neq x_0$.

concava

Studiare la seguente funzione.

$$f(x) = \sqrt[3]{|x^3 - x|}$$

dominio: $\mathbb{R}$, f è pari $\Rightarrow$ la studio solo per $x \geq 0$.

dovrei spezzare il valore assoluto

$x \geq 0$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 - x} & \text{se } (x^3 - x \geq 0), \text{ cioè } x \geq 1 \\ \sqrt[3]{x - x^3} & \text{se } (x^3 - x < 0) \text{ cioè } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

In alternativa: $f(x) = \sqrt[3]{|x^3 - x|} = \left|\sqrt[3]{x^3 - x}\right|$

Studio $\boxed{g(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}}$, perché poi f si ottiene "ribaltando" il grafico di g nelle zone dove g è negative.

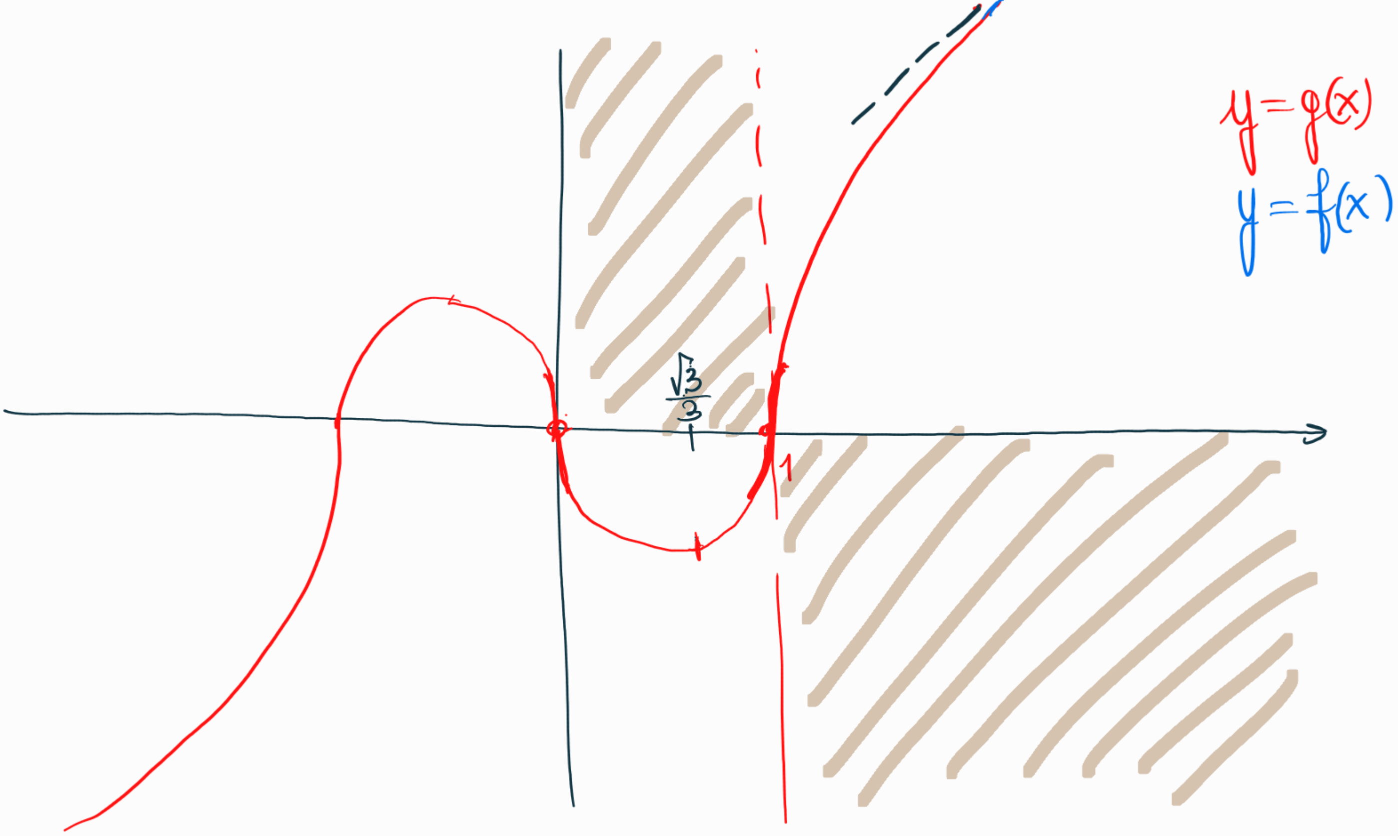
Studio completo di $g(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$.

dominio: $\mathbb{R}$, è dispari $\Rightarrow$ la studio solo per $\boxed{x \geq 0.}$

$g(x) = 0 \iff x^3 - x = 0 \iff x(x^2 - 1) = 0 \iff (x = 0) \vee (x = 1)$

$g(x) > 0 \iff x > 1$

$< 0 \iff 0 < x < 1$.



Continuità e limiti significativi.

g è continua nel suo dominio

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3-x} = +\infty$$

Asint. obl.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3-x}{x^3}} = 1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} \left(g(x)-mx\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3-x} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \underbrace{\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}} - 1\right)}_{\sim -\frac{1}{3x^2}} = \lim_{x\to+\infty} x\left(-\frac{1}{3x^2}\right) = 0$$

$(1+t)^\alpha - 1 \sim \alpha t \qquad t\to 0$

$\alpha = \frac{1}{3} \qquad t = -\frac{1}{x^2} \to 0$ per $x\to+\infty$

$y = x$ è asint. obliquo per $x\to+\infty$.

Derivata

g è sicuramente derivabile per $x \neq 0, 1$.

$$g'(x) = \left(\left(x^3 - x\right)^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^3 - x\right)^{-2/3}\left(3x^2 - 1\right) = \frac{3x^2 - 1}{3\left(x^3 - x\right)^{2/3}}$$

Derivabilità in $x = 0$

$$g'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{\sqrt[3]{h^3 - h}}^{\sim -\sqrt[3]{h}}}{h} = \lim_{h \to 0^+}\left(-\frac{1}{h^{2/3}}\right) = -\infty$$

Per simmetria, $g'_-(0) = -\infty$.

$x = 0$ è pto a tg. verticale (decrescente) (non derivabile)

Derivab. in $x = 1$.

Poiché g è continua in $x = 1$, posso fare il limite di g'.

$$g'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} g'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\overbrace{3x^2 - 1}^{\to 2}}{\underbrace{3\left(x^3 - x\right)^{2/3}}_{\to 0^+}} = +\infty$$

$$g'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} g'(x) = +\infty$$

$x = 1$ è pto a tg. verticale (crescente)

$$g'(x) = \frac{3x^2 - 1}{3\left(x^3 - x\right)^{2/3}} = 0 \iff x = \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0,57$$

$$g'(x) > 0 \iff x > \frac{\sqrt{3}}{3} \quad x \neq 1.$$

$$< 0 \iff 0 < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

g è strett. crescente in $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

g è strett. decresc. in $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ è min locale

$$g''(x) = \left(\frac{1}{3}(x^3-x)^{-2/3}(3x^2-1)\right)' = \qquad x \neq 0,\ x \neq 1.$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{2}{3}(x^3-x)^{-5/3}(3x^2-1)^2 + (x^3-x)^{-2/3}\,6x\right] =$$

$$= \frac{2}{9(x^3-x)^{5/3}}\left[-(3x^2-1)^2 + 9x(x^3-x)\right] =$$

$$= \frac{2}{9(x^3-x)^{5/3}}\left[\cancel{-9x^4} - 1 + 6x^2 + \cancel{9x^4} - 9x^2\right] =$$

$$= \frac{-2}{9\underbrace{(x^3-x)}^{5/3}}(+1+3x^2)$$

$g''(x) = 0$ mai

$g''(x) > 0 \iff 0 < x < 1$

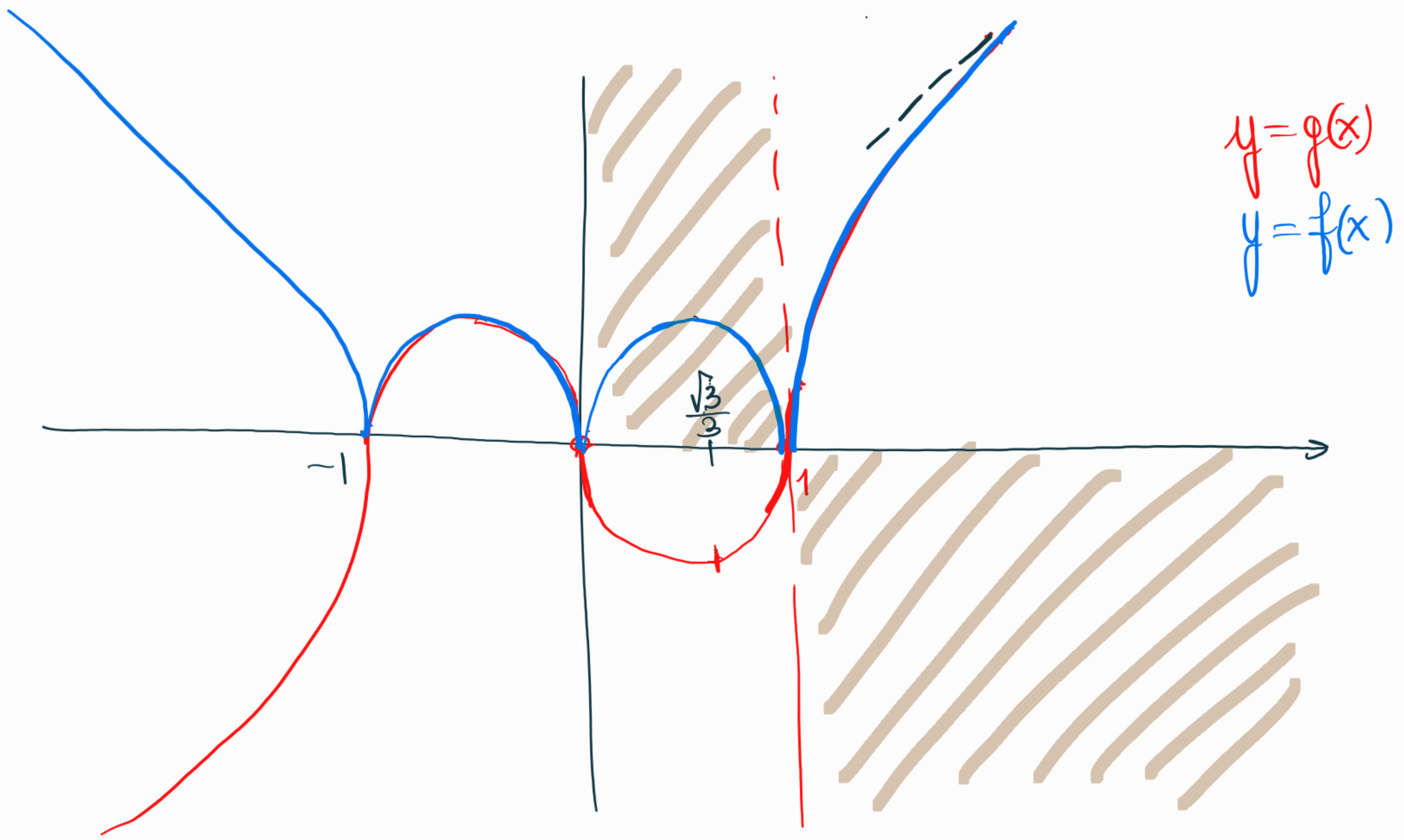
$\quad\ < 0 \iff x > 1$

g strett. convessa in $[0,1]$ (oss g strett. concava in $[-1, 0]$.

g strett. concava in $[1, +\infty)$.

$x = 0$ e $x = 1$ pti di flesso a tg verticale

Il grafico di f si ottiene ribaltando risp. all'asse x le parti del grafico di g che stanno al di sotto.



$f(x)$ è pari $\Rightarrow$ la descrivo solo per $x \geq 0$.

$f(x) = 0 \iff x = 0, \ x = 1$

$f(x) > 0$ negli altri pti

$f(x) < 0$ mai.

Strett. crescente in $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ e in $[1, +\infty)$

(non in $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup [1, +\infty)$)

strett. decrescente in $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right]$.

$x = 0$, $x = 1$ sono cuspidi.

$f'_+(0) = +\infty$ $\qquad$ $f'_+(1) = +\infty$

$f'_-(0) = -\infty$ $\qquad$ $f'_-(1) = -\infty$.

$$f'(x) = \begin{cases} -g'(x) & 0 < x < 1 \\ g'(x) & x > 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -g''(x) & 0 < x < 1 \\ g''(x) & x > 1. \end{cases}$$

f è strett. concava in $[0,1]$ e in $[1,+\infty)$

ma attenzione, non in $[0,+\infty)$

tantomeno in $\mathbb{R}$

Asintoto obl. per $x \to +\infty$ $\quad y = x$

$x \to -\infty$ $\quad y = -x$

TEOREMA di De L'Hôpital

(serve per risolvere f.i. del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$)

f, g derivabili in (a,b) $-\infty \leq a < b \leq +\infty$

Supponiamo che:

1) $\lim\limits_{\substack{x \to a^+ \\ b^-}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a^+ \\ b^-}} g(x) = 0$ (oppure $\pm\infty$)

2) $g'(x) \neq 0$ def^{te} per $x \to \substack{a^+ \\ b^-}$

3) $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a^+ \\ b^-}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}^*$.

Allora $\exists \lim\limits_{\substack{x \to a^+ \\ b^-}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Esempio:

1) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{\sin x}^{f(x)}}{\underbrace{x}_{g(x)}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\cancel{?}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{1} = 1$$

2) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{\log x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\cancel{?}}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{1/x}{1} = 0$$

3) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\cancel{?}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

Questo limite finora non si poteva fare.

4) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{\log(1+5x^2)}{\sqrt{x+1}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{?}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\frac{10x}{1+5x^2}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\overbrace{10x\cdot 2\sqrt{x+1}}^{\sim 20x^{3/2}}}{\underbrace{1+5x^2}_{\sim 5x^2}} = 0^+$$

5) $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(1^{+\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{\boxed{\frac{1}{x}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}} = e^0 = 1$$

$$\downarrow 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\cancel{?}}{\underset{\text{Hopital}}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{\underbrace{x\sin x}_{\sim x^2}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\cancel{?}}{\underset{\text{Hopital}}{=}}$$

$$\left(\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)' = \left(\log(\sin x)-\log x\right)' = \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{\cos x} - \cancel{x}\sin x - \cancel{\cos x}}{2\cancel{x}} = 0$$