

$$f(x) = x|x|$$

$$x \in \mathbb{R}$$

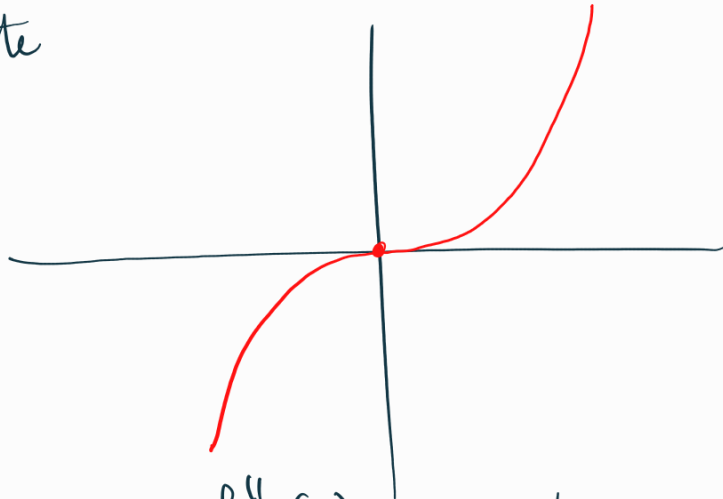
$$f'(x) = 2|x|$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x > 0 \Rightarrow f \text{ strett. convessa in } [0, +\infty) \\ -2 & \text{se } x < 0 \Rightarrow f \text{ strett. concava in } (-\infty, 0] \end{cases}$$

$f''(0)$ non esiste

$x=0$



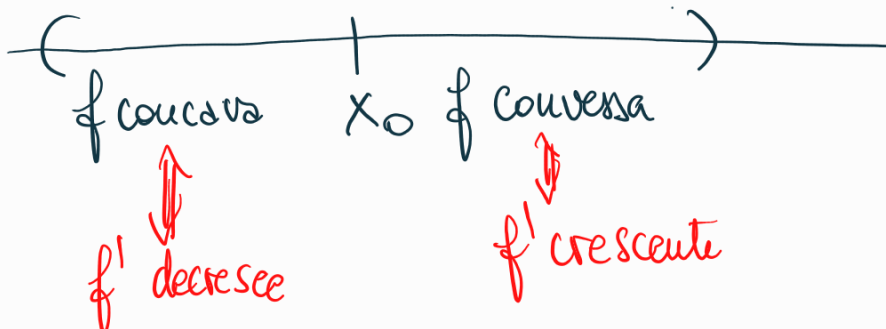
$x=0$ è un flesso, ma $f''(0)$ non esiste.

TEOREMA $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (a,b) e derivabile due volte in $x_0 \in (a,b)$.

Se x_0 è un pto di flesso, allora $f''(x_0) = 0$.

Dim. Supponiamo che

f sia concava in un intorno sinistro di x_0
convessa in " " destro di x_0



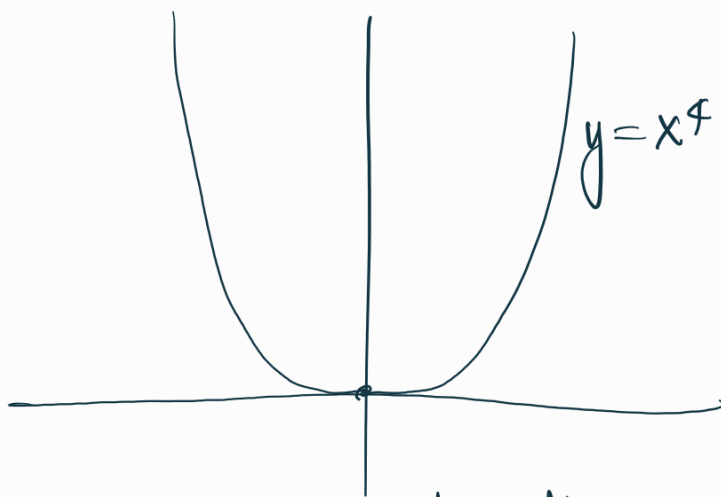
$\Rightarrow f'$ ha un pto di min. locale in x_0

$\Rightarrow$ Teor. di Fermat $(f')'(x_0) = 0$, cioè $f''(x_0) = 0$.

Tuttavia ci può essere un punto $x_0 \in (a, b)$ in cui $f''(x_0) = 0$, ma x_0 non è un flesso.

Per esempio $f(x) = x^4$ verifica $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$

$f''(0) = 0$, ma 0 non è un flesso. (non cambia la concavità/concavità attraversando $x=0$)



strett. convessa in $\mathbb{R}$

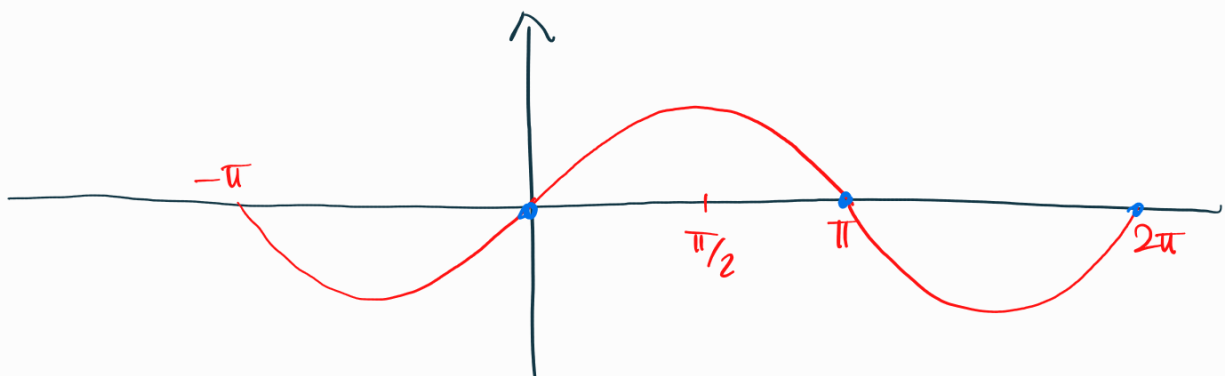
$x=0$ è un pto di min locale e assoluto.

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x.$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -\pi + 2k\pi < x < 2k\pi$$

$$< 0 \Leftrightarrow 2k\pi < x < (2k+1)\pi$$

$$= 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$$



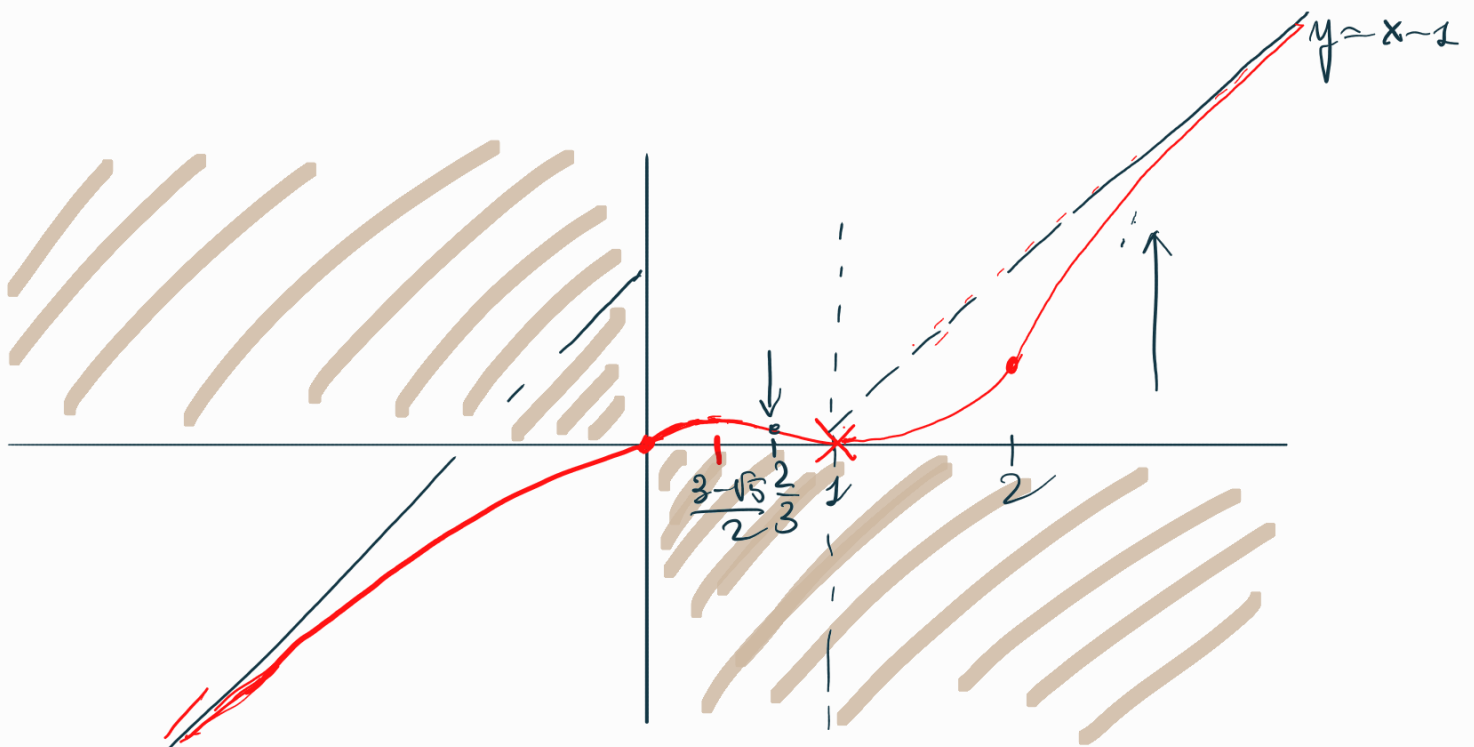
$f(x) = \sin x$ è strett. concava in $[2k\pi, (2k+1)\pi]$
 strett. convessa in $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$

I pti $x = k\pi$ sono pti di flesso.

$\sin x$ in $[0, \pi]$: $\underbrace{\text{è continuo e } f''(x) < 0 \text{ } \forall x \in (0, \pi)}_{\Downarrow \text{ criterio}}$
 f strett. concava in $[0, \pi]$.

Riprendiamo lo studio di funzione

$$f(x) = xe^{-\frac{1}{|x-1|}}$$



Averemo trovato che

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-1}} \left(1 + \frac{x}{(x-1)^2} \right) & x > 1 \\ e^{\frac{1}{x-1}} \left(1 - \frac{x}{(x-1)^2} \right) & x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{x > 1} \quad f''(x) &= e^{-\frac{1}{x-1}} \left[\left(1 + \frac{x}{(x-1)^2} \right) \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{(x-1)^2 - x \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \right] \\
&= e^{-\frac{1}{x-1}} \left[\frac{(x-1)^2 + x + (x-1)^2 - 2x(x-1)}{(x-1)^4} \right] = \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^4} \left[\cancel{2x^2} - 4x + 2 + x - \cancel{2x^2} + 2x \right] \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^4} [-x + 2].
\end{aligned}$$

$\boxed{x > 1}$

$$\begin{aligned}
f''(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 2 \\
> 0 &\Leftrightarrow 1 < x < 2 \\
< 0 &\Leftrightarrow x > 2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ f strett. convessa in $(1, 2]$
 strett. concava in $[2, +\infty)$
 $x = 2$ è un pto di flesso.

$$\boxed{x < 1} \quad f'(x) = e^{\frac{1}{x-1}} \left(1 - \frac{x}{(x-1)^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= e^{\frac{1}{x-1}} \left[\left(1 - \frac{x}{(x-1)^2} \right) \left(-\frac{1}{(x-1)^2} \right) - \frac{(x-1)^2 - x \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \right] = \\
&= \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^4} \left[- (x-1)^2 + x - (x-1)^2 + 2x(x-1) \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^4} \left[-\cancel{2x^2} + 4x - 2 + x + \cancel{2x^2} - 2x \right]$$

$$= \quad \parallel \quad \left[3x - 2 \right]$$

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{3}$$

$$f''(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3} < x < 1$$

$$f''(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{2}{3}$$

f strett. convessa in $\left[\frac{2}{3}, 1\right)$

f strett. concava in $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$

$x = \frac{2}{3}$ è pto di flesso.

Studio di funzione

(funzioni iperboliche)

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

seno iperbolico, coseno iperbolico

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

dominio: $\mathbb{R}$.

Sono continue, anzi derivabili, anzi, derivabile infinite volte.

Segno

$$\cosh x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x \geq e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -x$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0$$

Simmetrie:

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$$

è pari!

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh x$$

è dispari!

Limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$$

oss. che per $x \rightarrow +\infty$ $\sinh x \sim \frac{e^x}{2}$

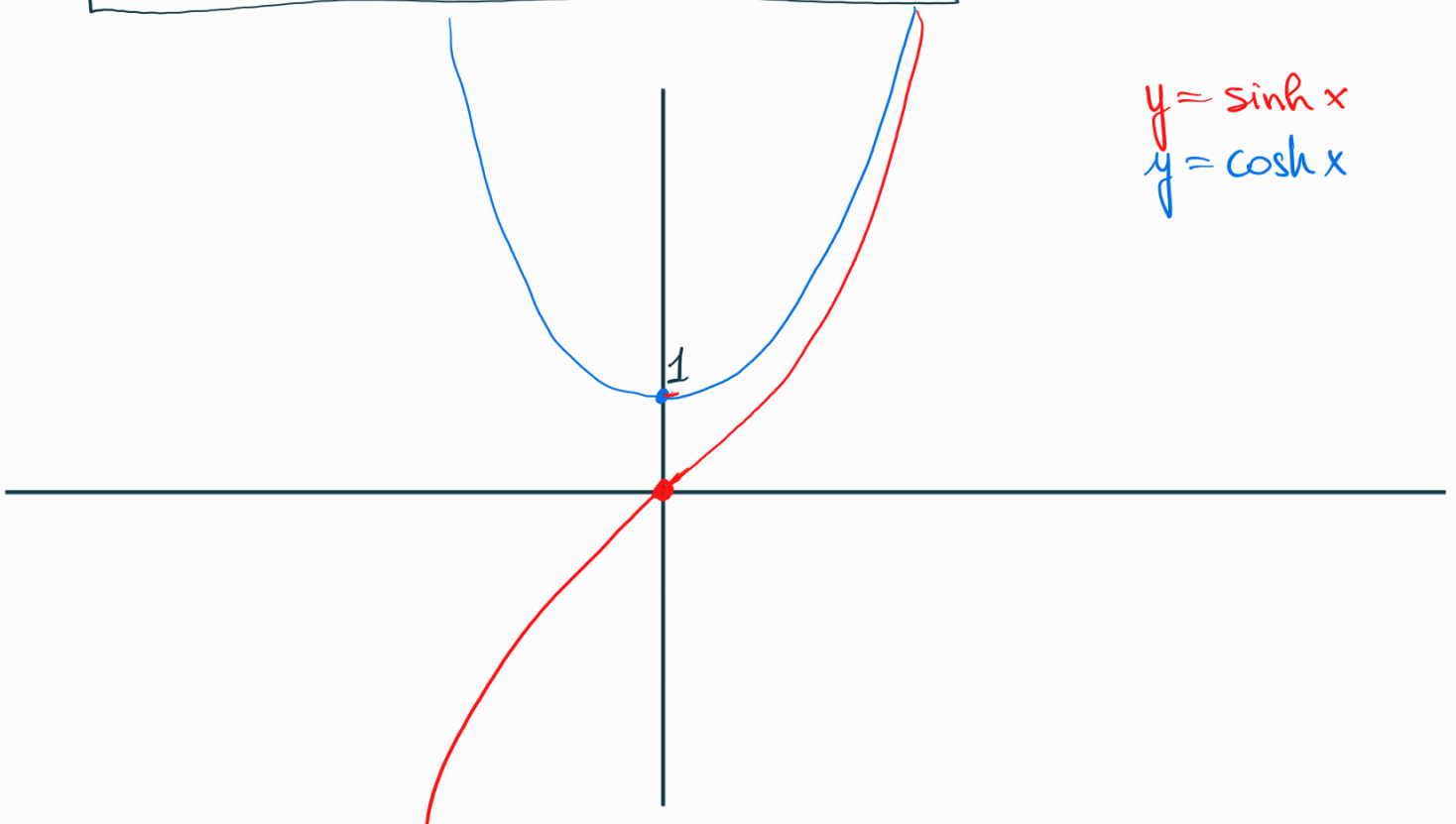
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty \quad \text{perché è dispari.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty$$

$\cosh x \sim \frac{e^x}{2}$ per $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = +\infty \quad \text{perché è pari.}$$

$\sinh 0 = 0, \quad \cosh 0 = 1$



Non hanno asintoti obliqui per $x \rightarrow +\infty$

$$\text{perché } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sinh x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = +\infty$$

e idem per il cosh,

Derivata prima

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cosh x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \sinh x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \sinh x$ è strett. crescente in $\mathbb{R}$.

$$(\cosh x)' = \sinh x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$\cosh x$ è strett. crescente in $[0, +\infty)$
" decrescente in $(-\infty, 0]$

$x=0$ è pto di min. assoluto.

$$(\sinh x)'' = \cosh x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$\sinh x$ strett. concava in $[0, +\infty)$
" concava in $(-\infty, 0]$.

$x=0$ pto di flesso.

$$(\cosh x)'' = \cosh x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\cosh x$ strett. convessa in $\mathbb{R}$.

Limiti notevoli.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} (e^{2x} - 1)}{2x} = 1$$

$\downarrow$ 1 $\downarrow$ limite notevole $\frac{e^t - 1}{t}$ per $t \rightarrow 0$

$$\sinh x \sim x \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} \frac{(e^{2x} + 1 - 2e^x)}{2x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}}{2} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

$\downarrow$ 1

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Identità fondamentale della trigonometria.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

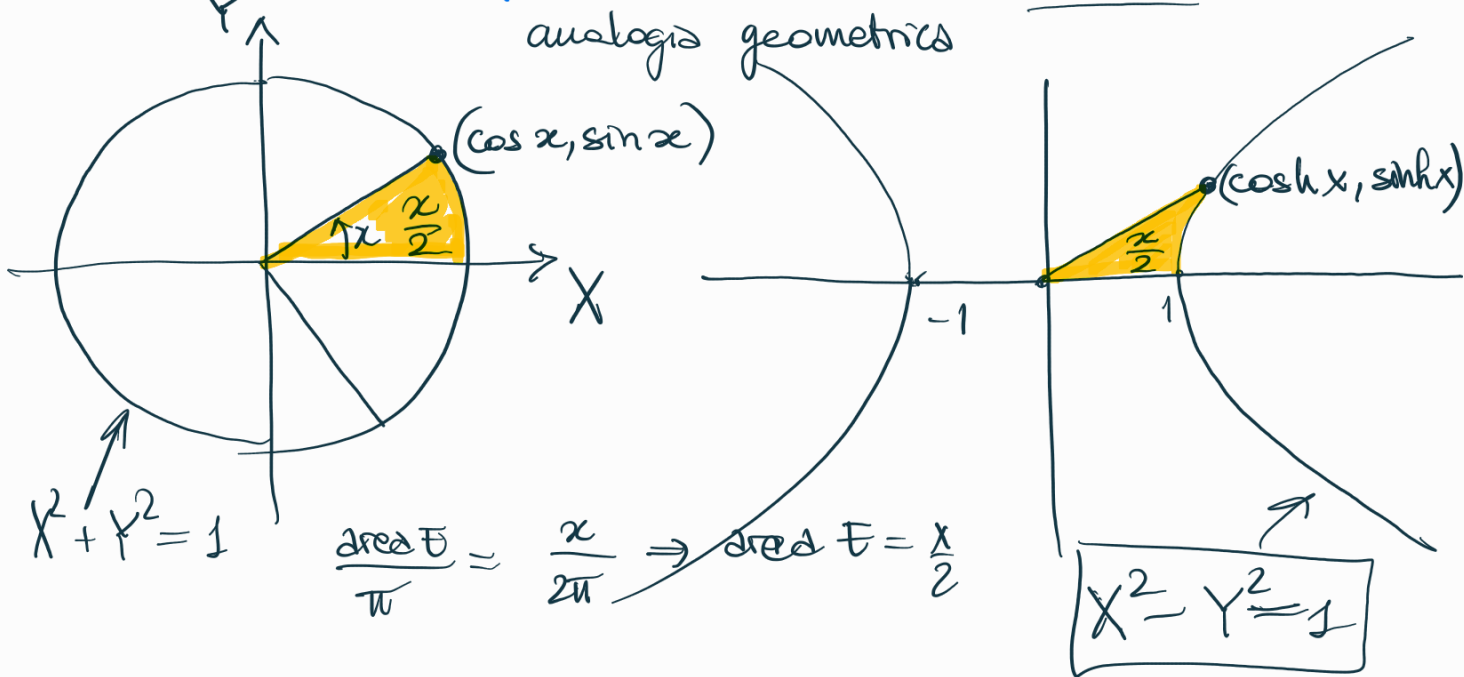
Identità fondamentale delle funzioni iperboliche.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \Rightarrow \cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \stackrel{?}{=} 1$$

$$\cancel{e^{2x}} + \cancel{e^{-2x}} + 2 - (\cancel{e^{2x}} + \cancel{e^{-2x}} - 2) \stackrel{?}{=} 4 \quad \underline{\text{vera.}}$$

analogia geometrica



Funzioni iperboliche inverse:

$$\sinh x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

iniettiva perché strett. crescente.

suriettiva perché continua in $\mathbb{R}$, $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$.
+ thm. dei valori intermedi.

biiettiva.

$\Rightarrow \exists$ la funzione inversa $\text{settsinh } y$.

$$\text{settsinh } y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$y \mapsto \text{l'unico } x \in \mathbb{R} \text{ t.c.}$

$$\boxed{\sinh x = y.}$$

$$\sinh x = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 2ye^x$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \quad \text{eq}^{\text{ue}} \text{ di } 2^{\circ} \text{ grado in } e^x.$$

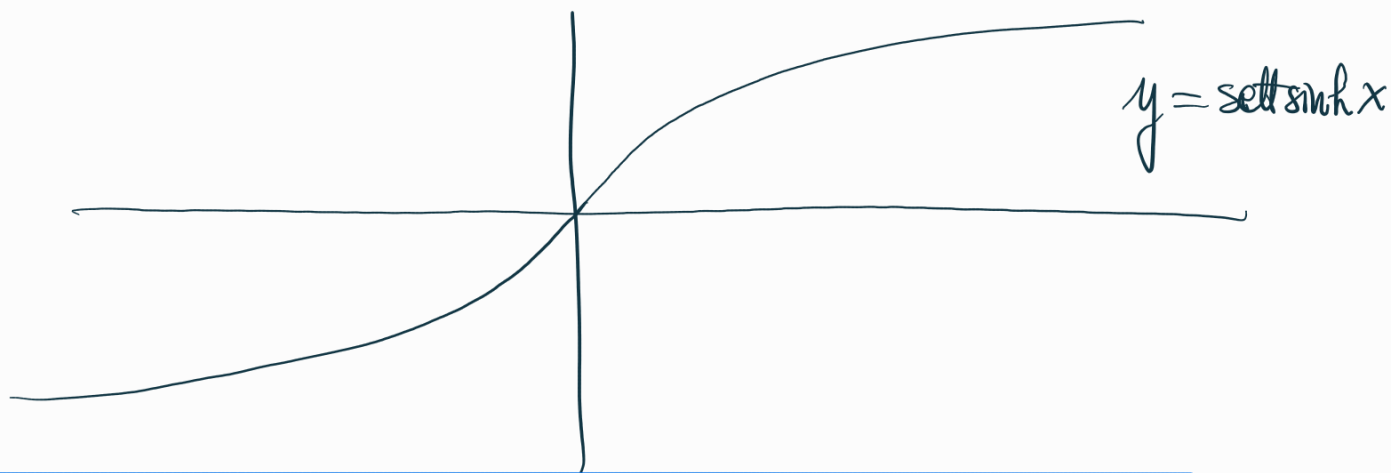
$$e^x = t$$

$$t^2 - 2yt - 1 = 0$$

$$e^x = t = y \pm \sqrt{y^2 + 1} = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

scelgo il +
perché venga > 0

$$x = \boxed{\operatorname{settsinh} y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$



$$D(\operatorname{settsinh} x) = D(\log(x + \sqrt{x^2 + 1})) =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{\cancel{2x}}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + 1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{x + \sqrt{x^2 + 1}}} \frac{\cancel{\sqrt{x^2 + 1}} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Oppure (derivata di f^{-1}).

$$(\operatorname{settsinh} y)' = \frac{1}{(\sinh x)'} =$$

$$= \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

dove $\boxed{y = \sinh x}$
 $x = \operatorname{settsinh} y$

$$\cosh x: [0, +\infty) \longrightarrow [1, +\infty)$$

~~bieltas~~

La sua inversa si chiama $\operatorname{settcosh} y$