

Conclusione dell'esercizio di ieri:

$$f(x) = x e^{-\frac{1}{x-1}} \quad \text{non definita in } x=1$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-1}} \left(1 + \frac{x}{(x-1)^2} \right) & x > 1 \\ e^{+\frac{1}{x-1}} \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{(1-x)^2} \right) & x < 1 \end{cases}$$

Avevamo visto che

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} \frac{(x^2 - 3x + 1)}{(1-x)^2} =$$

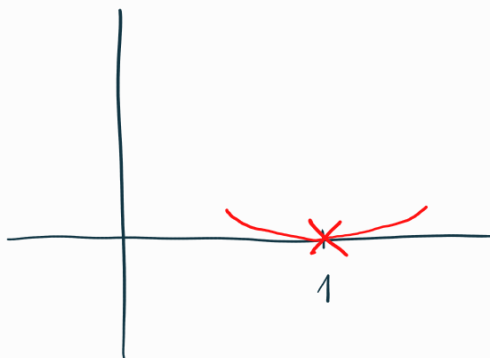
$$= - \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(1-x)^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{\left(\frac{1}{t^2} \right)} = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0$$

$\frac{1}{1-x} = t \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow$ La funzione $f(x)$ è prolungabile con derivabilità in $x=1$,
cioè, definendo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ è continua in $x=1$ (già visto) e derivabile in $x=1$,
e $\tilde{f}'(1) = 0$.



Derivata seconda

Def Supponiamo f derivabile in $E \subseteq \mathbb{R}$, $f': E \rightarrow \mathbb{R}$.
Sia $x_0 \in E$. Diremo che f è derivabile due volte in x_0 se f' è derivabile in x_0 , cioè se $\exists$ finito il limite

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

derivata seconda di f in x_0 .

Altre notazioni:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) (x_0) = D^2 f(x_0) = \ddot{f}(x_0)$$

Esempi:

$$f(x) = 5x + 3 \Rightarrow f'(x) = 5 \Rightarrow f''(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x \Rightarrow f''(x) = -\cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \cos(\log x) \quad \forall x > 0$$

$$f'(x) = -\frac{\sin(\log x)}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{\frac{\cos(\log x)}{x} \cdot x - \sin(\log x)}{x^2} = \frac{\sin(\log x) - \cos(\log x)}{x^2} \quad \forall x > 0$$

$$f(x) = x^{5/3} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$f'(x) = \frac{5}{3} x^{2/3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = \frac{10}{9} x^{-1/3} \quad \forall x \neq 0.$$

per $x=0$? $f''_+(0) = +\infty$, $f''_-(0) = -\infty$ non è derivabile due volte in $x=0$

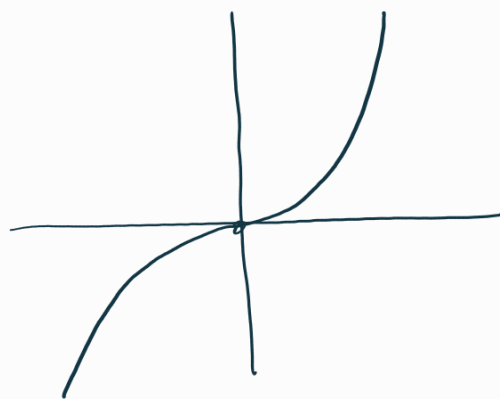
$$f(x) = x|x| \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$f'(x) = 2|x| \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{già visto}).$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x > 0 \\ -2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

$$\text{In } x=0? \quad f''_+(0) = 2, \quad f''_-(0) = -2.$$

$\Rightarrow$ Non è derivabile 2 volte in $x=0$.



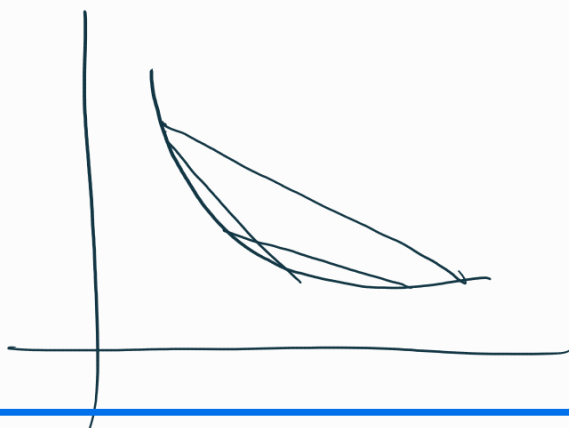
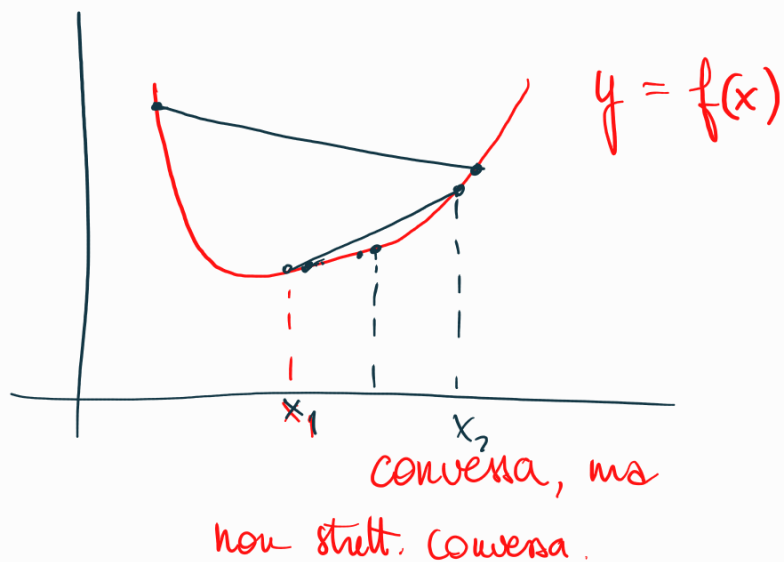
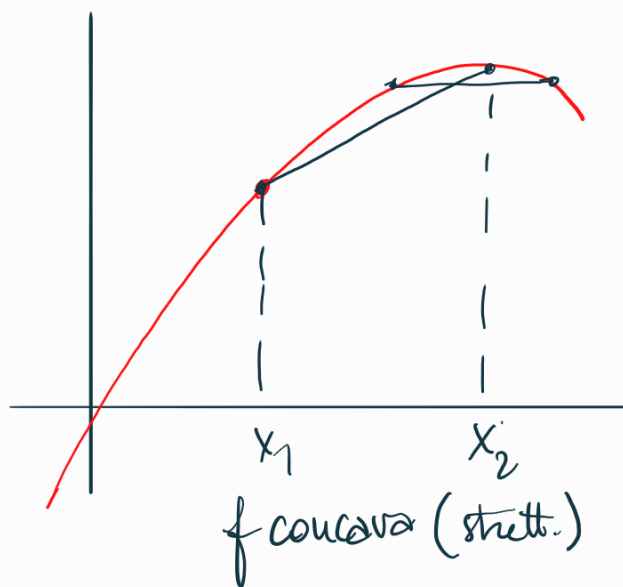
Funzioni concave/convesse.

Def. geometrica di funzioni concave/convesse.

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I intervallo).

Diremo che f è:

- convessa in I se, presi comunque due punti distinti $x_1, x_2 \in I$ il segmento di estremi $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ non ha punti al di sotto del grafico di f .
concava
- strettamente convessa in I se, presi comunque $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ il segmento di estremi $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ è strettamente al di sopra del grafico di f (eccetto negli estremi).
concava



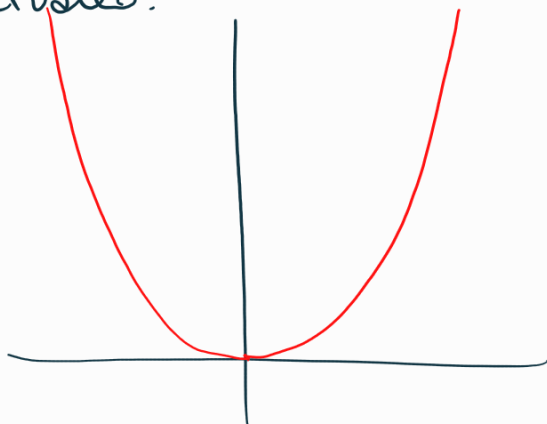
OSS f strettamente convessa in $I \rightarrow f$ convessa in I
CONCAVA CONCAVA

$$f(x) = ax + b, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

è convessa e concava in $\mathbb{R}$ (non strett. convessa e non strett. concava)

anzi, queste sono le sole funzioni convesse e concave in un intervallo.

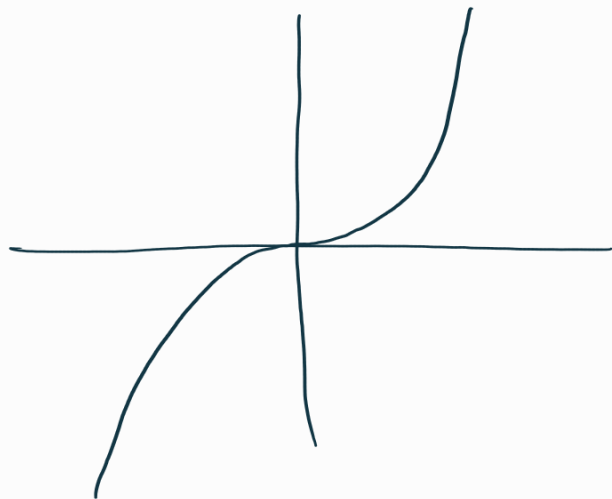
$f(x) = x^2$ ist stet. konv. in $\mathbb{R}$.



$f(x) = x^3$ non è né concava né convessa in $\mathbb{R}$.

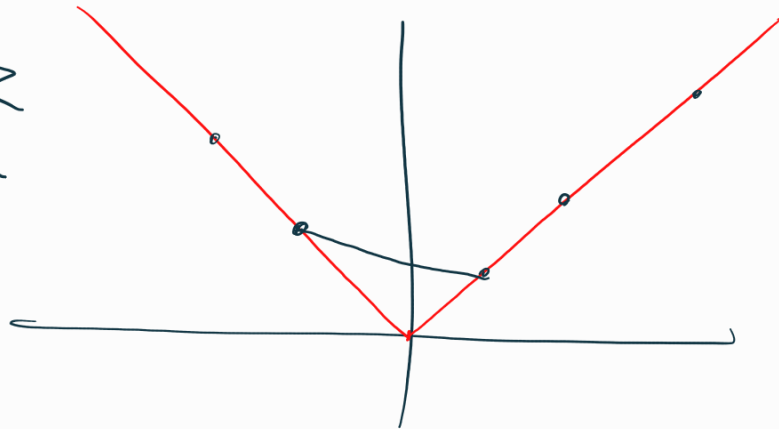
Essa è strett. convessa in $[0, +\infty)$

strett. concava in $(-\infty, 0]$



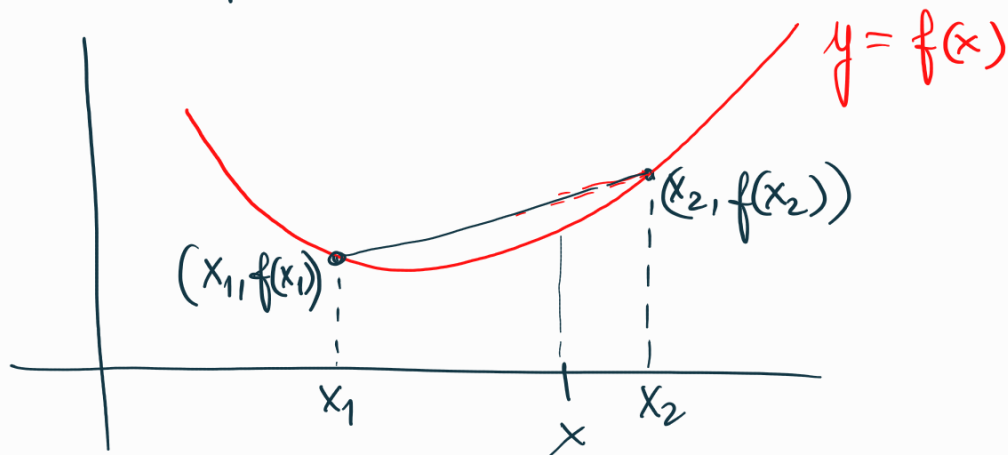
$f(x) = |x|$ è convessa in $\mathbb{R}$

ma non strett. convessa



Oss Fissati due punti $x_1, x_2 \in I$ ($x_1 < x_2$ per semplicità)

Sia x un punto compreso tra x_1 e x_2 .



Eq^{ne} della retta passante per $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$:

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

f convessa $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I$ t.c. $x_1 < x_2$

$\forall x \in (x_1, x_2)$ si ha

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad (*)$$

oss Un pto compreso tra x_1 e x_2 si può scrivere
così.

$$x = x_1 + \lambda (x_2 - x_1) = \overbrace{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2}^{\text{comb. convessa di } x_1 \text{ e } x_2} \quad \text{con } \lambda \in (0, 1)$$

Mettendo questa espressione di x nella (*) si trova

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \quad \forall \lambda \in (0, 1)$$

Infatti:

$$f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \underbrace{((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 - x_1)}_{\lambda(x_2 - x_1)}$$

$$f(x_1) + \lambda (f(x_2) - f(x_1)) = (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

DEF analitica di funtz. convessa/concava.

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

- convessa in I se $\forall x_1, x_2 \in I$, con $x_1 \neq x_2$, $\forall \lambda \in (0, 1)$
si ha:

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

- concava in I se

$$\geq$$

• strett. convessa in I se

$$\text{-----} \quad \textcircled{<} \quad \text{-----}$$

• strett. concava in I se - - -

$$\text{-----} \quad \textcircled{>} \quad \text{-----}$$

Proviamo che $f(x) = x^2$ è strett. convessa in $\mathbb{R}$.

Fissiamo $x_1 < x_2$, $\lambda \in (0, 1)$, mostriamo che

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \stackrel{?}{<} (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

$$((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)^2 \stackrel{?}{<} (1-\lambda)x_1^2 + \lambda x_2^2$$

$$(1-\lambda)^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2 \stackrel{?}{<} (1-\lambda)x_1^2 + \lambda x_2^2$$

$$[(1-\lambda)^2 - (1-\lambda)]x_1^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2 + (\lambda^2 - \lambda)x_2^2 \stackrel{?}{<} 0$$

Divido per $1-\lambda > 0$

$$[\cancel{(1-\lambda)} - \cancel{1}]x_1^2 + 2\lambda x_1 x_2 - \lambda x_2^2 \stackrel{?}{<} 0.$$

$$-\lambda x_1^2 + 2\lambda x_1 x_2 - \lambda x_2^2 \stackrel{?}{<} 0$$

divido per $\lambda > 0$

$$-x_1^2 + 2x_1 x_2 - x_2^2 \stackrel{?}{<} 0$$

$$x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 \stackrel{?}{>} 0$$

$$(x_1 - x_2)^2 > 0 \quad \text{vero perché } x_1 \neq x_2.$$

Già difficile per x^2 , quindi bisogna trovare un criterio più facile

OSS f è (strett.) convessa $\Leftrightarrow -f$ è (strett.) concava.

TEOREMA di regolarità delle f. convesse

$f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ convessa in (a,b) . Allora
(concava)

1) f è continua in (a,b) ;

2) $\forall x \in (a,b)$ esistono finite $f'_+(x)$, $f'_-(x)$, e si ha:

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \\ (\geq)$$

TEOREMA Sia f continua in I intervallo, derivabile due volte nei pti interni di I . Allora:

1) f è convessa in $I \Leftrightarrow f'$ crescente in $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \text{ interno a } I$
concava decresc. ≤ 0

2) f è strett. convessa in $I \Leftrightarrow f'$ strett. cresc. in $I \Leftrightarrow f''(x) > 0 \quad \forall x \text{ interno a } I$
strett. concava strett. decr. $\Leftarrow f''(x) < 0$ "

Esempio $f(x) = x^2$ è strett. convessa in $\mathbb{R}$.
perché $f''(x) \equiv 2 > 0$.

OSS $\nleftrightarrow$ La freccia $\Leftarrow$ nell'ultimo enunciato non si può invertire.

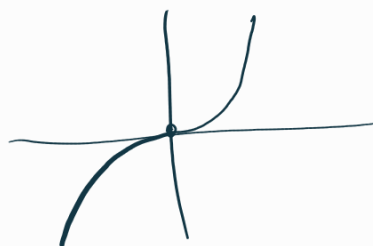
Esistono f strett. convessa in I t.c. f'' si annulla in qualche punto

$$f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 \text{ strett. cresc.} \Rightarrow f \text{ strett. convessa}$$

$$f''(x) = 12x^2 \text{ si annulla in } x=0$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 6x$$

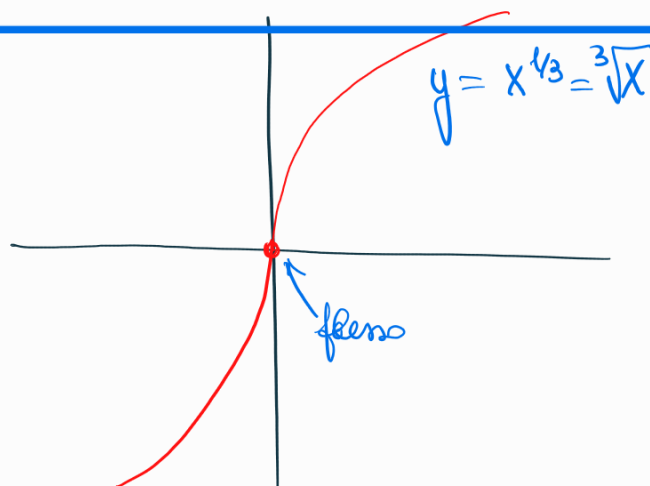
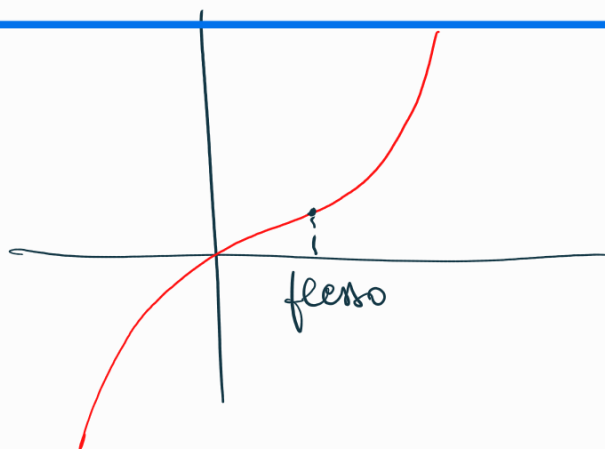
$$\begin{array}{ll} f''(x) > 0 & \text{in } (0, +\infty) \Rightarrow f \text{ strett. convessa in } [0, +\infty) \\ f''(x) < 0 & \text{in } (-\infty, 0) \Rightarrow f \text{ strett. concava in } (-\infty, 0] \end{array}$$

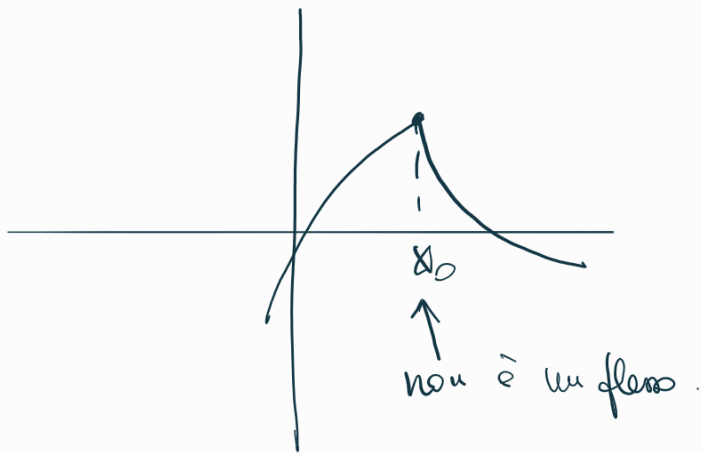


DEF. di flesso.

Siano $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ ed esista la tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ (eventualmente verticale).

Il punto x_0 si dice **punto di flesso** se esiste un intorno destro di x_0 in cui $f(x)$ è convessa e un intorno sinistro di x_0 in cui f è concava, o viceversa.





Esempio. $f(x) = x^{1/3}$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3 x^{2/3}} \quad \text{se } x \neq 0.$$

$f'(0) = +\infty$ (non è derivabile) pto a tg verticale.

$$f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-5/3} \quad x \neq 0$$

$$f''(x) \geq 0 \iff x \leq 0$$

$\Rightarrow f$ strett. convessa in $(-\infty, 0]$
strett. concava in $[0, +\infty)$

$x=0$ pto di flesso.