

CRITERIO DIFFERENZIALE di MONOTONIA

Sia I intervallo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua in I
 f derivabile nei pti interni di I . Allora:

- 1) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \text{ interno a } I \Leftrightarrow f \text{ crescente in } I$
- 2) $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \text{ interno a } I \Leftrightarrow f \text{ decrescente in } I$
- 3) $f'(x) > 0 \quad \forall x \text{ interno a } I \Rightarrow f \text{ strett. crescente in } I$
- 4) $f'(x) < 0 \quad \forall x \text{ interno a } I \Rightarrow f \text{ strett. decrescente in } I$

Provare che

$$\underbrace{\arctg x + \arctg \frac{1}{x}}_{\varphi(x)} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x > 0$$

φ derivabile in $(0, +\infty)$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \quad \forall x > 0$$

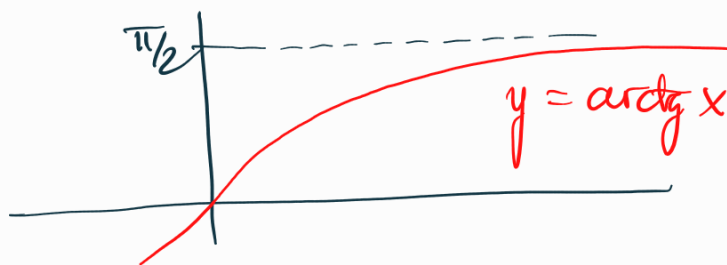
$$\Rightarrow \varphi(x) \equiv C = \varphi(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

oss $\boxed{\arctg x + \arctg \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad \forall x < 0}$

(perché φ è dispari)

Applicazione: Trovare l'ordine di infinitesimo di:

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$



La domanda significa: trovare (se esiste $\alpha > 0$) t.c.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{1/x^\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1/x)}{1/x^\alpha} = 1$$

$\alpha = 1$

$$\frac{\operatorname{arctg} t}{t} \rightarrow 1 \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

Infinitesimo di ordine 1.

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \sim \frac{1}{x} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

Studio di $f(x) = x^{-4} - 2x^{-2} = \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2}$

dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

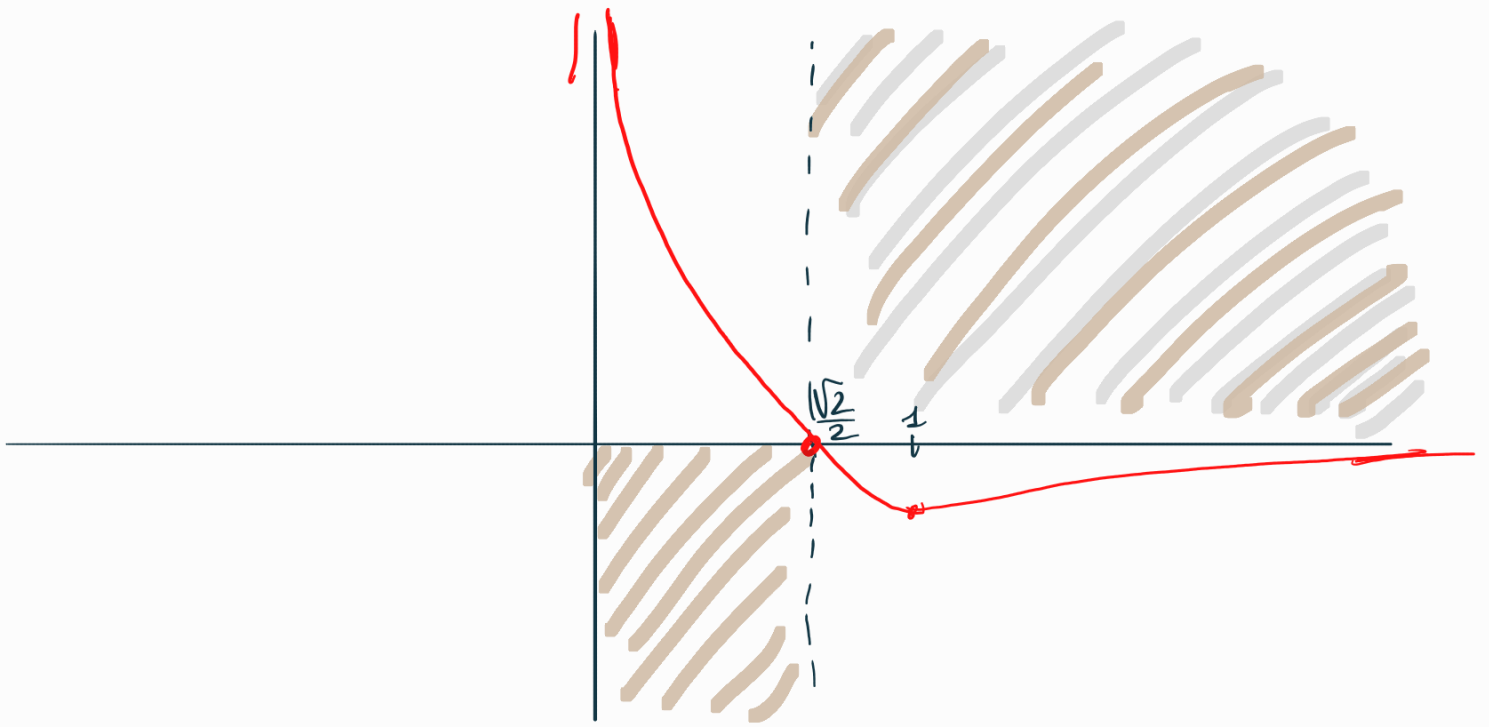
OSS f è pari $\Rightarrow$ la studio per $x > 0$.

Studio del segno: $f(x) = \frac{1 - 2x^2}{x^4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

f continua, anzi derivabile nel suo dominio.



Limiti significativi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2} \right) = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2} \right) = +\infty$$

$$\frac{1}{x^4} \left(\frac{1 - 2x^2}{x^2} \right)$$

↓
1

DEF Diremo che la retta verticale $x = x_0$ è un asintoto verticale di f se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm \infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm \infty$$

(basta una delle due)

Nel nostro caso la retta $x = 0$ (asse delle y) è asintoto verticale.

DEF La retta $y = y_0$ si dice asintoto orizzontale
per $x \rightarrow +\infty$ se
 $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} f(x) = y_0$$

Nel nostro caso la retta $y = 0$ (asse delle x)
è asintoto orizz. per $x \rightarrow +\infty$ (e, per simmetria, anche per $x \rightarrow -\infty$)

Derivata prima

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2} \right)' = -4x^{-5} + 4x^{-3} = 4 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^5} \right) = \\ = 4 \frac{x^2 - 1}{x^5} \quad \forall x \in \text{dom } f.$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

f strettamente crescente in $[1, +\infty)$

f " decrescente in $(0, 1]$

$x = 1$ pto di min. assoluto.

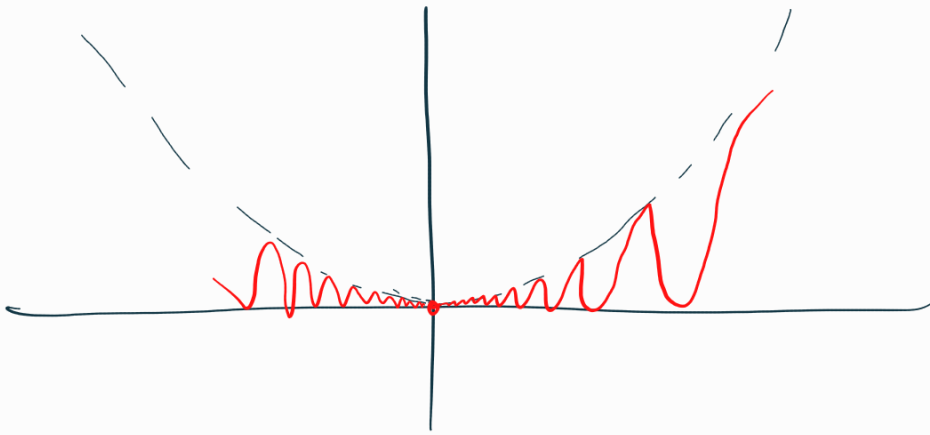
Manca lo studio di f'' (da fare in seguito).

OSS Spesso si ragiona in questa maniera:

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ decrescente in } (x_0 - \delta, x_0] \\ f \text{ crescente in } [x_0, x_0 + \delta') \end{array} \right\} \Rightarrow x_0 \text{ pto di min. locale di } f.$$

La freccia si inverte? vale il " $\Leftarrow$ "? NO,

Esempio $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



$x_0 = 0$ è pto di min assoluto, ma non esiste alcun intorno destro in cui f è crescente, né alcun intorno sinistro di $x_0 = 0$ in cui f è decrescente.

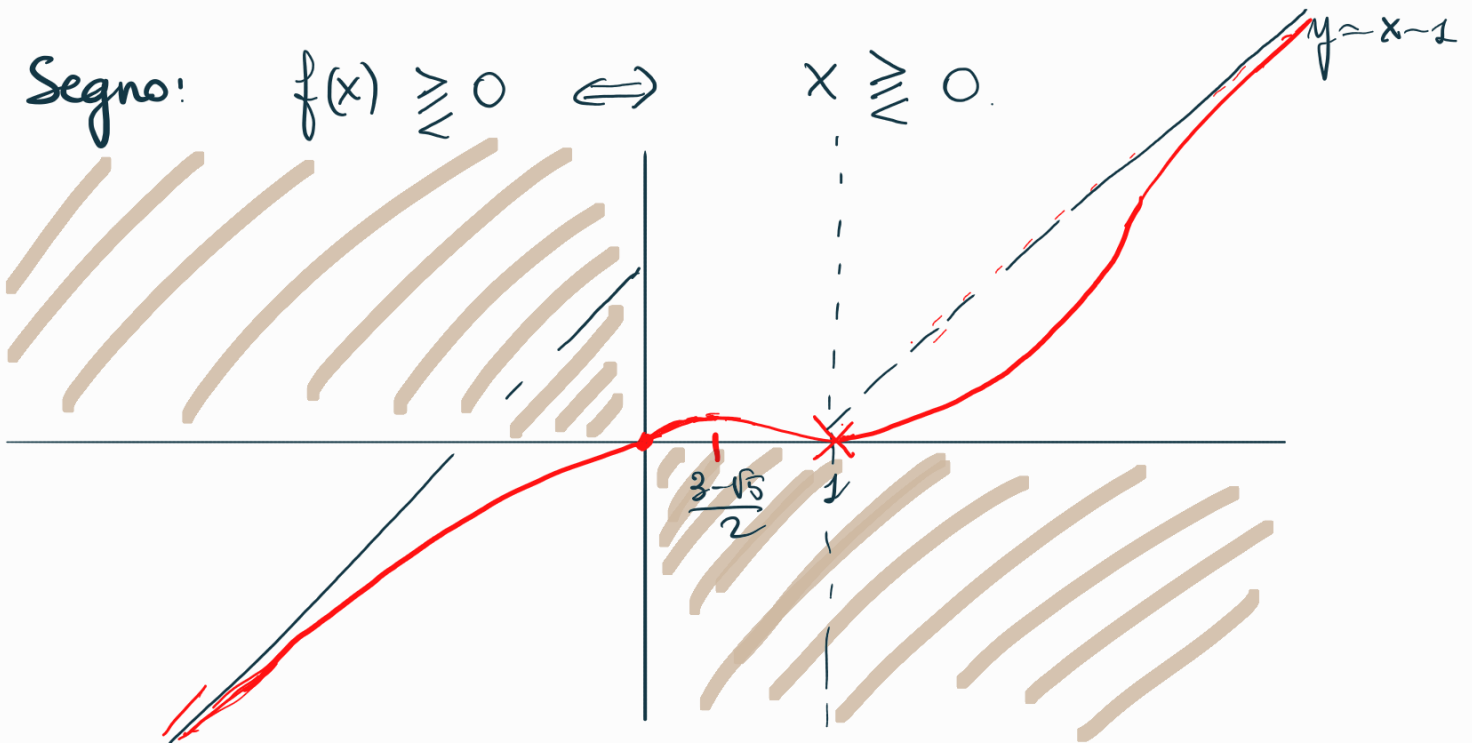
Studio di funzione

$$f(x) = x e^{-\frac{1}{|x-1|}} = \begin{cases} x e^{-\frac{1}{x-1}} & \text{se } x > 1 \\ x e^{\frac{1}{x-1}} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Domino: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Non ci sono simmetrie evidenti.

Segno: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.



Continuità e limiti significativi:

f è continua, anzi derivabile nel suo dominio.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x}_{+\infty} \underbrace{e^{-\frac{1}{x-1}}}_{1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x}_{-\infty} \underbrace{e^{\frac{1}{x-1}}}_{1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \underbrace{x}_{1} \underbrace{e^{-\frac{1}{x-1}}}_{0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \underbrace{x}_{1} \underbrace{e^{\frac{1}{x-1}}}_{-\infty} = 0$$

$\Rightarrow f$ è estendibile con continuità in $x=1$. Cioè:

$$\text{Se definisco } \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

allora $\tilde{f}$ è continua in $x=1$, quindi in tutto $\mathbb{R}$.

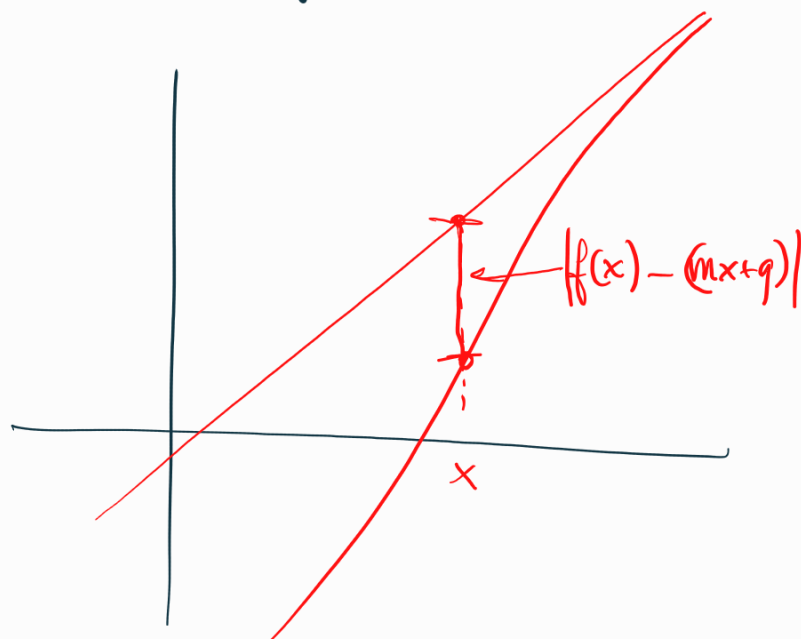
Asintoti obliqui

DEF Una retta di equazione $y = mx + q$ $m, q \in \mathbb{R}, m \neq 0$
si dice asintoto obliquo di f per $x \rightarrow +\infty$
 $x \rightarrow -\infty$

se

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} (f(x) - (mx + q)) = 0$$

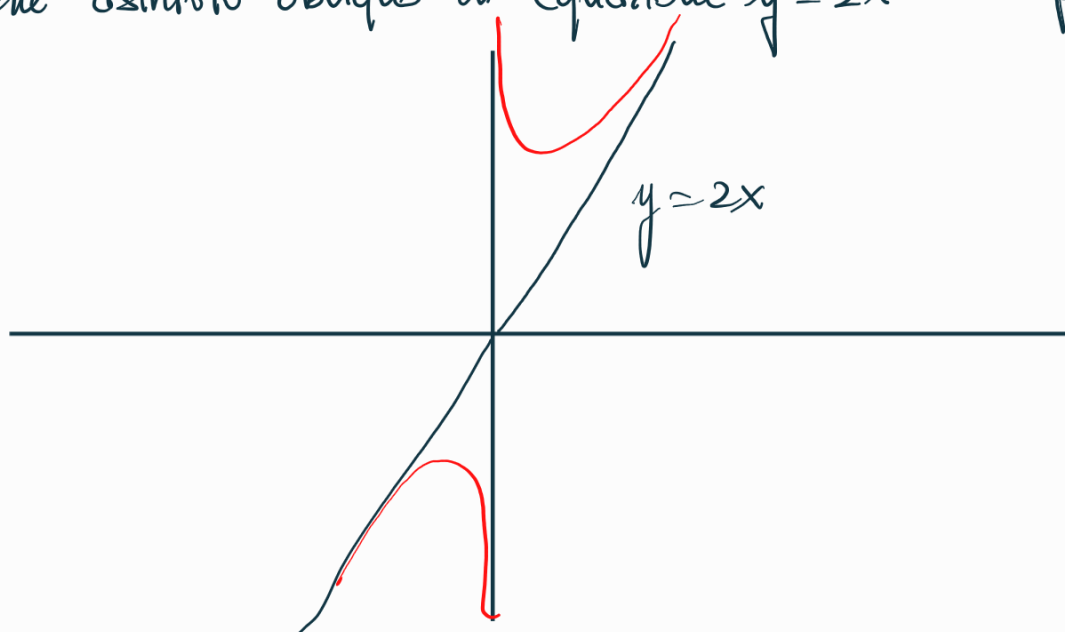
che equivale a $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} |f(x) - (mx+q)| = 0$.



Esempio: $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$

ammette asintoto obliquo di equazione $y = 2x$

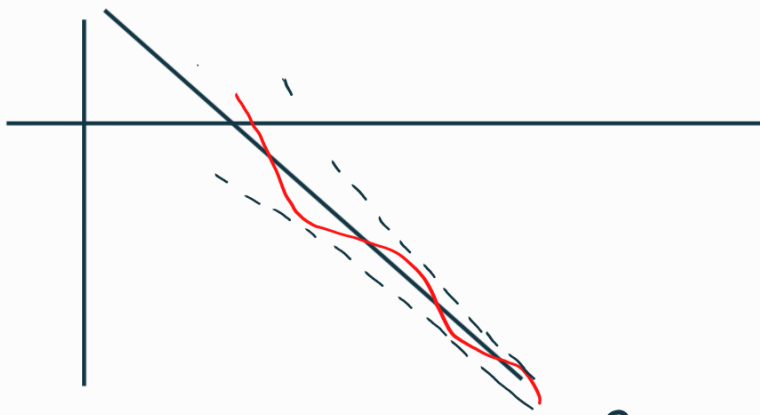
per $x \rightarrow +\infty$
 $x \rightarrow -\infty$



Esempio $f(x) = -x + 5 + \frac{\sin x}{x}$

ha asintoto obliquo di eq^{ue} $y = -x + 5$ per $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) - (-x + 5) = \frac{\sin x}{x} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$



Come si trovano gli asintoti obliqui?

PROP

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} (f(x) - (mx + q)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} \frac{f(x)}{x} = m \\ \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} (f(x) - mx) = q \end{cases}$$

Dim. " $\Leftarrow$ " è banale (l'ultimo limite è ciò che devo provare)

" $\Rightarrow$ "

se $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0$, allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{f(x) - (mx + q)}{x}}_{\substack{\text{"} \\ \left(\frac{0}{+\infty}\right) = 0}} + \underbrace{\frac{mx + q}{x}}_m \right) = m \quad \square$$

Se uno dei due limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = q$$

non esiste o viene infinito, non c'è asintoto obliquo.

Torniamo alla nostra $f(x) = xe^{-\frac{1}{x-1}}$

Abbiamo visto $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Vediamo se ha un asintoto obliquo.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x-1}} = 1 = m.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-\frac{1}{x-1}} - x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x}_{+\infty} \left(\underbrace{e^{-\frac{1}{x-1}} - 1}_{0} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{x-1} \right) = -1$$

$\sim -\frac{1}{x-1}$

$$e^t - 1 \sim t \quad \text{per } t \rightarrow 0 \quad t = -\frac{1}{x-1} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

$$y = x - 1 \quad \text{è asint. obl per } x \rightarrow +\infty.$$

Asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\underbrace{e^{\frac{1}{x-1}} - 1}_{\sim \frac{1}{x-1}} \right) = 1.$$

$$y = x + 1 \quad \text{è asintoto obliquo per } x \rightarrow -\infty$$

$$f'(x) = (x e^{-\frac{1}{x-1}})' =$$

$$= e^{-\frac{1}{x-1}} \left(1 + \frac{x}{(x-1)^2} \right) > 0$$

$$\forall x > 1.$$

$$(x < 1)$$

$$f'(x) = (x e^{\frac{1}{x-1}})' = e^{\frac{1}{x-1}} \left(1 - \frac{x}{(x-1)^2} \right) =$$

$$= e^{\frac{1}{x-1}} \frac{(x-1)^2 - x}{(x-1)^2} = \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2} (x^2 - 3x + 1) \geq 0$$

$$\uparrow$$

$$x^2 - 3x + 1 \geq 0$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ non acc}$$

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \simeq 0,4 \text{ acc}$$

$$\text{—————} > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$< 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \cancel{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \quad 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left(x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \vee (x > 1)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < 1$$

f strett. crescente in $(-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}]$ e in $(1, +\infty)$

f strett. decresc. in $[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1)$

$x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ pto di max. locale.

Vediamo quanto vale $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f'(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-\frac{1}{x-1}} \left(1 + \frac{x}{(x-1)^2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{-\frac{1}{x-1}} \frac{(x-1)^2 + x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\frac{1}{x-1} = t \rightarrow +\infty \quad = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{1/t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \dots = 0$$