ANALISI VETTORIALE - LT FISICA 30046 - A.A. 2025/26
SCHEDA 06 - 20251106

EUGENIO MONTEFUSCO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
PIAZZALE ALDO MORO 5 - 00185 ROMA

ESERCIZIO 1. *Determinare, se esistono, massimo e minimo di* $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ *in*

$$D = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 9x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

ESERCIZIO 2. *Date due sfere* $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ *disgiunte si classifichino tutti i punti critici della funzione* $f(p, q) = \|p - q\|_2$ *con* $p \in \gamma_1$ *e* $q \in \gamma_2$.

ESERCIZIO 3. *Determinare, se esistono, i punti dell'insieme*

$$K = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_3 = 1, \quad x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

che hanno massima e minima distanza dell'origine $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.

ESERCIZIO 4. *i. Si calcoli il massimo e il minimo assoluti della funzione* $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, *con* $(a, b) \neq (0, 0)$, *per* $(x_1, x_2) \in D = \{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
ii. Si generalizzi il punto precedente considerando la funzione $f(x) = w \cdot x$, *con* $w \neq 0$, *e* $x \in D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$.

ESERCIZIO 5. *Dati, in* $\mathbb{R}^3$, *i vincoli*

$$S = \left\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\} \qquad e \qquad T = \left\{x_3^2 + x_2^2 = x_1^2 - 4, x_1 > 0\right\}$$

si calcoli il minimo assoluto della funzione $f(p, q) = \|p - q\|_2$ *con* $p \in S$ *e* $q \in T$.

ESERCIZIO 6. *Siano* $r = \{x_1 = x_2, x_3 = 0\}$ *e* $s = \{x_1 + x_2 = 1, x_3 = 1\}$ *due rette di* $\mathbb{R}^3$ *prive di punti comuni:*
i. si determini $p \in r$ *e* $q \in s$ *tali che* $\|p - q\|_2 \leq \|x - y\|$ *per ogni* $x \in r$ *e* $y \in s$,
ii. si verifichi che la retta per p *e* q *è ortogonale alle due rette* r *ed* s.

ESERCIZIO 7. *Data la funzione* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *di legge* $f(x_1, x_2) = x_1^2x_2^2$, *si spieghi perché tale funzione è differenziabile in tutto il piano e si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto* $(1, 1, f(1, 1))$

ESERCIZIO 8. *Data* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *sia* $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *definita come* $F(x) := Mx \cdot x$. *Si spieghi perché* F *è differenziabile, poi si calcoli* $\nabla F(x)$, $HF(x)$ *e il polinomio di Taylor, di grado 1 e 2, con* $x_0 = 0$.

ESERCIZIO 9. *Sia* $E = \{x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$, *si provi che*
i. E *è chiuso e limitato,*
ii. che esistono su E *un punto di massima distanza e un punto di minima distanza da* 0.

ESERCIZIO 10. *Siano* $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *per* $i = 1, \ldots, n$, *delle funzioni assegnate.*
i. Provare che se $f_i \in C^0(\mathbb{R})$, *per* $i = 1, \ldots, n$, *allora la funzione*

$$F(x) := f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n) \qquad x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$$

è continua in tutto lo spazio,
ii. provare che se $f_i \in C^1(\mathbb{R})$, *per* $i = 1, \ldots, n$, *allora la funzione* F *(definita nel punto i.) è derivabile in ogni direzione e in tutto lo spazio,*
iii. si scriva l'espressione di $\partial_w f(x)$ *con* $x, w \in \mathbb{R}^n$.

ESERCIZIO 11. *Sia* $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definita come* $F(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2)$.
i. F *è iniettiva? Si calcoli lo jacobiano dell'applicazione.*
ii. Sia $C_r = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = r^2\}$, *determinare, per* $r > 0$, $F(C_r)$, *cioè l'immagine di* C_r *tramite* F.
iii. Determinare $F(\mathbb{R}^2)$, *cioè l'immagine della funzione* F.

ESERCIZIO 12. *Determinare (se esiste) il massimo assoluto della funzione* $f(x_2, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3^3$ *nella regione dello spazio* $D = \{x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^6 \leq 6\}$.

SVOLGIMENTI

ESERCIZIO 1. *Determinare, se esistono, massimo e minimo di* $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ *in*

$$D = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 9x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

DISCUSSIONE. L'esistenza del massimo e del minimo è conseguenza del teorema di Weierstrass. Infatti f, essendo un polinomio, è in $C^0(D)$, inoltre D è un insieme chiuso dato che $D = \{g(x_1, x_2) \leq 0\} = g^{-1}((-\infty, 0])$ e $g(x, y) = 9x^2 + y^2 - 1$ è una funzione continua, infine è limitato in quanto $D \subseteq [-1/3, 1/3] \times [-1, 1]$ come si vede facilmente dal fatto che

$$9x_1^2 \leq 9x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \qquad x_2^2 \leq 9x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

D è un'ellisse di centro l'origine e semiassi 1/3 e 1. Notiamo che non esistono punti di non derivabilità, dato che

$$\nabla f(x) = (1, 1) \neq (0, 0)$$

quindi la funzione f non ha punti critici liberi. Per cui i punti di massimo e minimo cadono sulla frontiera di D: $\partial D = \{9x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, cerchiamo di identificarli usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Gli estremi di f sul vincolo $g(x_1, x_2) = 0$ sono tra le soluzioni del sistema

$$\det\begin{pmatrix} \partial_1 f(x_1, x_2) & \partial_2 f(x_1, x_2) \\ \partial_1 g(x_1, x_2) & \partial_2 g(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 18x_1 & 2x_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{e} \qquad g(x_1, x_2) = 0$$

Ciò equivale a risolvere il sistema

$$x_2 = 9x_1 \qquad 9x_1^2 + x_2^2 = 1$$

da cui ricaviamo le soluzioni $(1/3\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$ e $(-1/3\sqrt{10}, -3/\sqrt{10})$, in conclusione vale

$$\max_D(f) = f\left(\frac{1}{3\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{\sqrt{10}}{3} \qquad \min_D(f) = f\left(-\frac{1}{3\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{\sqrt{10}}{3}$$

Essendo il dominio pari e la funzione obiettivo dispari non è sorprendente che il massimo e il minimo siano uguali in valore assoluto...
Concludiamo l'esercizio osservando che la funzione f è una funzione affine, quindi gli insiemi di livello $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = c$ sono delle rette nel piano e il vettore ∇f è ortogonale a tali linee, quindi il problema di ottimizzazione è risolto dal coefficiente angolare delle rette tangenti all'ellisse parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante. ∎

Esercizio 2. *Date due sfere $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ disgiunte si classifichino tutti i punti critici della funzione* $f(p,q) = \|p-q\|_2$ *con* $p \in \gamma_1$ *e* $q \in \gamma_2$.

Discussione. Studiamo il problema in $\mathbb{R}^n$, visto che non presenta particolari difficoltà rispetto al caso tridimensionale. Senza perdita di generalità possiamo supporre che $\gamma_1 = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$, questo è sempre possibile operando una traslazione che porti il centro della sfera in O e successivamente un'omotetia che scali il raggio ad uno.
Come risultato delle due precedenti operazioni e operando un'opportuna rotazione, abbiamo che $\gamma_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - ce_1\|_2 = r\}$ con $c > 0$, inoltre deve valere che

$$\text{o} \qquad c > r+1 \qquad \text{oppure} \qquad c+r<1$$

a secondo che γ_2 sia esterna o interna a γ_1. Consideriamo il caso in cui γ_2 è esterna e scriviamo la funzione di Lagrange relativo al nostro problema di ottimizzazione

$$L(p,q,\lambda) = \|p-q\|_2^2 - \lambda_1\left(\|p\|_2^2 - 1\right) - \lambda_2\left(\|q-ce_1\|_2^2 - r^2\right)$$

dove abbiamo usato la distanza al quadrato, visto che i punti estremali saranno gli stessi (la funzione $s \longmapsto s^2$ è iniettiva e crescente sulla semiretta $[0,+\infty)$). Scriviamo il gradiente di L, poiché la funzione L per esteso è

$$L(p,q,\lambda) = (p_1-q_1)^2 + \ldots + (p_n-q_n)^2 - \lambda_1\left(p_1^2 + \ldots + p_n^2 - 1\right) - \lambda_2\left((q_1-c)^2 + q_2^2 + \ldots + q_n^2 - r^2\right)$$

e le sue derivate parziali hanno la seguente espressione

$$\begin{matrix} \partial_i L(p,q,\lambda) = \partial_{p_i} L(p,q,\lambda) = 2(p_i - q_i) - 2\lambda_1 p_i \\ \partial_{n+i} L(p,q,\lambda) = \partial_{q_i} L(p,q,\lambda) = 2(q_i - p_i) - 2\lambda_2(q_i - c\delta_{1i}) \end{matrix} \qquad \text{per } i = 1,2,\ldots,n$$

dove $\delta_{1i} = 1$ se $i=1$ e $\delta_{1i} = 0$ se $i = 2,\ldots,n$. Allora abbiamo che

$$\nabla L(p,q,\lambda) = 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad \begin{cases} (p-q) - \lambda_1 p = 0 \\ (q-p) - \lambda_2(q - ce_1) = 0 \\ 1 - p_1^2 - \ldots - p_n^2 = 0 \\ r^2 - (q_1-c)^2 - q_2^2 - \ldots - q_n^2 = 0 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni possiamo dedurre che

$$(1-\lambda_1)p = q \qquad \text{da cui} \qquad (1-\lambda_2)q - p = (1-\lambda_2)q - \frac{1}{1-\lambda_1}q = \frac{\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2}{1-\lambda_1}q = -\lambda_2 ce_1$$

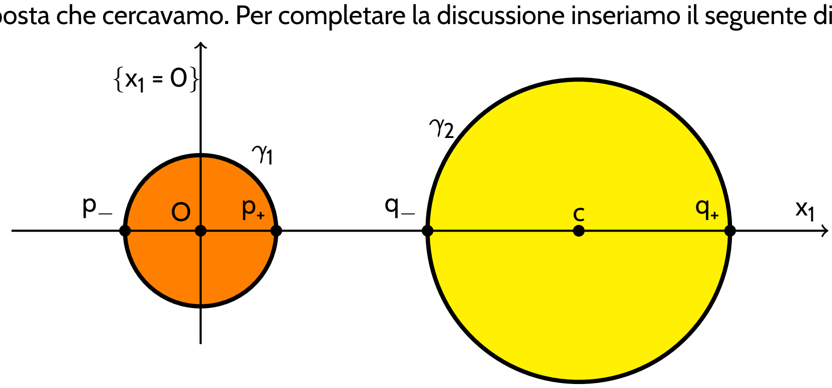
questo implica che i vettori p e q sono entrambi multipli di e_1, quindi $p = (p_1, 0, \ldots, 0)$ e $q = (q_1, 0, \ldots, 0)$. Poiché $p \in \gamma_1$ e $q \in \gamma_2$ gli unici punti possibili sono i seguenti

$$p_\pm = (\pm 1, 0, \ldots, 0) \qquad \text{e} \qquad q_\pm = (c \pm r, 0, \ldots, 0)$$

confrontando i valori della funzione distanza sulle sole quattro coppie di punti critici possibili

$$\max(f) = f(p_-, q_+) = c+r+1 > f(p_+, q_+) = c+r-1, f(p_-, q_-) = c-r+1 > f(p_-, q_-) = c-r-1 = \min(f)$$

otteniamo la risposta che cercavamo. Per completare la discussione inseriamo il seguente disegno



l'asse verticale raccoglie tutte le direzioni ortogonali a e_1, mentre le circonferenze sono le sezioni delle due ipersfere descritte nel testo. ■

ESERCIZIO 3. *Determinare, se esistono, i punti dell'insieme*

$$K = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_3 = 1, \quad x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

che hanno massima e minima distanza dell'origine $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$.

DISCUSSIONE. Osserviamo che i punti che massimizzano o minimizzano la distanza del punto $x = (x_1, x_2, x_3) \in K$ dall'origine cioè, la quantità $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ sono gli stessi che massimizzano o minimizzano la distanza al quadrato cioè la funzione $f(x_1, x_2, x_3) = \|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Consideriamo quindi i problemi dei seguenti estremi vincolati

$$\max_K(f) \qquad \min_K(f)$$

Riscriviamo il vincolo in forma equivalente

$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1x_2 + x_3 = 0, x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}$$

e siano $g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_3$ e $g_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 1$. K è un insieme chiuso perché g_1 e g_2 sono funzioni continue e K è definito da vincoli di uguaglianza, inoltre è limitato dato che

$$K \subseteq [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1] = [-1,1]^3 \subseteq \mathbb{R}^3$$

e poichè f è continua in un insieme chiuso e limitato: il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza del massimo e del minimo assoluto in K. Dato che $f, g_1, g_2 \in C^1(\mathbb{R}^3)$ (anzi $C^\infty(\mathbb{R}^3)$) applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Cerchiamo gli eventuali punti di non regolarità di K cercando i punti in cui la matrice jacobiana

$$Jg(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(x) & \partial_2 g_1(x) & \partial_3 g_1(x) \\ \partial_1 g_2(x) & \partial_2 g_2(x) & \partial_3 g_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango minore di due. Si ha che $rg(Jg(x)) = 1$ se e solo se

$$\begin{cases} x_1^2 = x_2^2 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

e dato che il punto $O(0,0,0)$ non apparteiene a K segue che tutti i punti di K sono regolari.

Cerchiamo i punti di massimo e minimo vincolato tra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \det\begin{pmatrix} \partial_1 f(x) & \partial_2 f(x) & \partial_3 f(x) \\ \partial_1 g_1(x) & \partial_2 g_1(x) & \partial_3 g_1(x) \\ \partial_1 g_2(x) & \partial_2 g_2(x) & \partial_3 g_2(x) \end{pmatrix} = 0 \\ g_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} \det\left[\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ x_2 & x_1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{pmatrix}\right] = 4x_3\left(x_2^2 - x_1^2\right) = 0 \\ x_1x_2 + x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Partiamo dalla prima equazione: se $x_3 = 0$ allora, dalla seconda e terza equazione, si trovano i punti

$$Q_\pm = (0, \pm 1, 0) \qquad R_\pm = (\pm 1, 0, 0)$$

Invece se $x_2^2 = x_1^2$ si ottengono i punti

$$P_\pm = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) \qquad S_\pm = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

Calcoliamo i valori che f assume in questi punti

$$f(Q_\pm) = f(R_\pm) = 1 \qquad f(P_\pm) = f(S_\pm) = \frac{5}{4}$$

Concludiamo che

$$\min_K(f) = f(Q_\pm) = f(R_\pm) = 1 \qquad \max_K(f) = f(P_\pm) = f(S_\pm) = \frac{5}{4}$$

per cui possiamo affermare che $Q_\pm, R_\pm$ sono i punti cercati che realizzano la distanza minima, mentre $P_\pm, S_\pm$ sono i punti di distanza massima. ∎

ESERCIZIO 4. *i. Si calcoli il massimo e il minimo assoluti della funzione*

$$f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 \qquad (a, b) \neq (0, 0)$$

con $(x_1, x_2) \in D = \{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
ii. Si generalizzi il punto i considerando la funzione $f(x) = w \cdot x$, *con* $w \neq 0$ *e* $x \in D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$.

DISCUSSIONE. i. Il nostro dominio D è un insieme chiuso e limitato del piano, quindi è compatto, siccome la funzione f è continua (precisamente f è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$) il teorema di Weierstrass ci assicura che esistono massimo e minimo assoluti.
Poiché $\nabla f(x, y) = (a, b) \neq (0, 0)$ non ci sono punti stazionari interni a D, quindi i valori di massimo e minimo sono assunti sul bordo del nostro dominio. Tali valori estremali possono essere calcolati tramite parametrizzazione del vincolo o ricorrendo al teorema dei moltiplicatori di Lagrange: percorreremo la seconda strada perché si presta ad essere utilizzata anche in ii, cioè ad essere generalizzata in dimensione più alta.
Ponendo $D = \left\{g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\right\}$ abbiamo che

$$\nabla g(x_1, x_2) = 2(x_1, x_2) = 2x \neq (0, 0) \qquad \text{per ogni } (x, y) \in D$$

quindi D è un vincolo regolare e possiamo dire che i punti critici vincolati di f su D sono i punti $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}) \in D$ in cui si ha

$$\nabla g(x_0) = \lambda \nabla f(x_0)$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, e siccome $\nabla f(x_0) = (a, b)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ abbiamo che

$$\nabla g(x_0) = 2x_0 = \lambda(a, b) \qquad \text{con} \qquad x_{0,1}^2 + x_{0,2}^2 = 1$$

Allora otteniamo che

$$x_0 = \pm\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

ricordando che $(a, b) \neq (0, 0)$. Ovviamente i due punti trovati sono uno l'unico punto di massimo assoluto, e l'altro l'unico minimo assoluto, infatti è facile verificare che

$$f\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$$

ii. Generalizzare la discussione precedente risulta, tutto sommato, abbastanza lineare, prima di tutto osserviamo che

$$\nabla f(x) = \nabla(w \cdot x) = w \neq 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n$$

quindi la funzione, come prima, non ha punti critici liberi. Però D^n è compatto (in quanto chiuso e limitato) dunque dobbiamo cercare massimo e minimo assoluti sulla frontiera $\partial D^n = S^{n-1}$ usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Come prima abbiamo che

$$S^{n-1} = \left\{g(x) = \|x\|_2^2 - 1 = 0\right\} \qquad \text{quindi} \qquad \nabla g(x) = 2x \neq 0$$

e il teorema di Lagrange ci suggerisce di cercare i punti della sfera S^{n-1} in cui il gradiente delle funzioni g e f risultano paralleli, cioè

$$x_0 = \pm\frac{w}{\|w\|_2} \in S^{n-1}$$

da cui

$$f\left(\pm\frac{w}{\|w\|_2}\right) = \pm w \cdot \frac{w}{\|w\|_2} = \pm\|w\|_2$$

Si noti che il risultato esprime analiticamente il fatto (già osservato a lezione) che il gradiente della funzione indica la direzione di crescita/decrescita più rapida, quindi la direzione più "diretta" per raggiungere il massimo o il minimo della funzione. ∎

Esercizio 5. *Dati, in* $\mathbb{R}^3$*, i vincoli*

$$S = \left\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\} \qquad e \qquad T = \left\{x_3^2 + x_2^2 = x_1^2 - 4, x_1 > 0\right\}$$

si calcoli il minimo assoluto della funzione

$$f(p, q) = \|p - q\|_2 \qquad con\ p \in S\ e\ q \in T$$

Discussione. Il problema consiste nel trovare due punti, uno su S e uno su T che realizzino il minimo della distanza pensata come funzione di sei variabili (precisamente due terne reali appartenenti ai rispettivi vincoli). Naturalmente non è affatto evidente che un tale minimo esista: la funzione distanza è inferiormente limitata, ma non è garantita a priori l'esistenza di un punto di minimo assoluto (esercizio: si provi a costruire un esempio esplicito in cui viene verificata tale affermazione). Scriviamo la funzione lagrangiana e il suo gradiente

$$\begin{aligned}
L(p, q, c) &= L(p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, c_1, c_2) \\
&= (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2 - c_1(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 1) - c_2(-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + 4) \\
&\partial_1 L(p, q, c) = 2(p_1 - q_1) - 2c_1p_1 = 2[(p_1 - q_1) - c_1p_1] = 0 \\
&\partial_2 L(p, q, c) = 2(p_2 - q_2) - 2c_1p_2 = 2[(p_3 - q_3) - c_1p_2] = 0 \\
&\partial_3 L(p, q, c) = 2(p_3 - q_3) - 2c_1p_3 = 2[(p_3 - q_3) - c_1p_3] = 0 \\
&\partial_4 L(p, q, c) = 2(q_1 - p_1) + 2c_2q_1 = 2[(q_1 - p_1) + c_2q_1] = 0 \\
&\partial_5 L(p, q, c) = 2(q_2 - p_2) + 2c_2q_2 = 2[(q_2 - p_2) - c_2q_2] = 0 \\
&\partial_6 L(p, q, c) = 2(q_3 - p_3) + 2c_2q_3 = 2[(q_3 - p_3) - c_2q_3] = 0 \\
&\partial_7 L(p, q, c) = 1 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = 0 \\
&\partial_8 L(p, q, c) = q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 - 4 = 0
\end{aligned}$$

le precedenti equazioni sono equivalenti al seguente sistema

$$\begin{cases}
p_1 - q_1 = c_1p_1 = -c_2q_1 \\
p_2 - q_2 = c_1p_2 = c_2q_2 \\
p_3 - q_3 = c_1p_3 = c_2q_3 \\
p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \\
q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = 4
\end{cases}$$

Se $c_1 = 0$ o $c_2 = 0$ il sistema si riduce alle relazioni $p = q$, ma $T \cap S = \emptyset$, quindi nessuno dei due moltiplicatori può essere nullo. Inoltre notiamo che dalle prime tre relazioni segue

$$\begin{aligned}
p_1 &= (1 - c_2)q_1 = -\frac{c_1(1 - c_2)}{c_2}p_1 \\
p_2 &= (1 + c_2)q_2 = \frac{c_1(1 + c_2)}{c_2}p_2 \\
p_3 &= (1 + c_2)q_3 = \frac{c_1(1 + c_2)}{c_2}p_3
\end{aligned}$$

e il sistema si riduce al seguente

$$\begin{cases}
p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \\
\dfrac{p_1^2}{(1 - c_2)^2} - \dfrac{1}{(1 + c_2)^2}(x_2^2 + x_3^2) = 4 \\
p_1 = -\dfrac{c_1(1 - c_2)}{c_2}p_1 \\
p_2 = \dfrac{c_1(1 + c_2)}{c_2}p_2 \\
p_3 = \dfrac{c_1(1 + c_2)}{c_2}p_3
\end{cases}$$

Concentriamoci sulla terza equazione e osserviamo che

$$p_1 = -\frac{c_1(1 - c_2)}{c_2}p_1 \qquad \text{implica} \qquad p_1 = 0 \quad \text{o} \quad \frac{c_1(c_2 - 1)}{c_2} = 1$$

se $p_1 = 0$ segue, dalla prima equazione, che $p_2^2 + p_3^2 = 1$, però la seconda equazione si riduce a

$$-\frac{1}{(1+c_2)^2}(p_2^2 + p_3^2) = 4$$

il che è impossibile! Quindi abbiamo che $c_1 = c_2/(c_2 - 1)$ e sostituendo questa relazione nelle ultime due equazioni si ottiene che $p_2 = p_3 = 0$ e, grazie alle equazioni dei vincoli, otteniamo la soluzione del nostro problema

$$p = (\pm 1, 0, 0) \qquad q = (2, 0, 0)$$

il punto $(-1, 0, 0)$ può essere scartato, perché non da' luogo al minimo assoluto della f, e otteniamo che

$$f((1,0,0),(2,0,0)) = \min_{(p,q)\in S\times T}(f(p,q)) = 1$$

Per concludere ritorniamo sulla questione iniziale e discutiamo l'esistenza del minimo assoluto di f. Innanzitutto ricordiamo che S è chiuso e limitato, quindi compatto; invece T, pur essendo chiuso, non è limitato: infatti vale che, per ogni $k = 2, 3, 4...$

$$q_k = \left(k, \sqrt{k^2 - 4}, 0\right) \in T \qquad \text{e} \qquad \|q_k\|_2 = \left\|\left(k, \sqrt{k^2-4}, 0\right)\right\|_2^2 = (2k^2 - 4) \longrightarrow +\infty$$

la successione di punti precedente mostra che

$$\sup_{(p,q)\in S\times T}(f(p,q)) = \sup_{(p,q)\in S\times T}(\|p-q\|_2) \geq \lim_{k\longrightarrow+\infty}\|q_k - e_3\|_2 = +\infty$$

Il fatto che T non sia compatto fa sì che non possiamo appoggiarci al teorema di Weierstrass per l'esistenza del minimo assoluto, quindi dobbiamo ragionare in maniera leggermente diversa. Cominciamo notando che $S \subseteq [-1,1]^3 \subseteq \{x_1 \leq 1\}$, visto che

$$x_1^2, x_2^2, x_3^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

mentre $T \subseteq \{x_1 \geq 2\}$ visto che

$$0 \leq x_3^2 + x_2^2 = x_1^2 - 4$$

quindi $S \cap T = \emptyset$, inoltre è facile verificare che, per $R > 2$, $S \subseteq [-R,R]^n$ e $T \cap [-R,R]^n \neq \emptyset$, quindi f, ristretta su $S \times (T \cap [-R,R]^n)$ che è un insieme chiuso e limitato, possiede massimo e minimo assoluto per il teorema di Weierstrass. Poiché $f(p,q) \geq \sqrt{2R^2 - 2R - 3}$ per ogni $p \in S$ e $q \in T \setminus [-R,R]^n$ il minimo assoluto in $S \times (T \cap [-R,R]^n)$ è il minimo assoluto di f su $S \times T$ e tale minimo, che abbiamo già individuato, vale 1 ed è assunto nel punto $(p_m, q_m) = ((1,0,0),(2,0,0)) \in S \times T$. ∎

Esercizio 6. *Siano* $r = \{x_1 = x_2, x_3 = 0\}$ *e* $s = \{x_1 + x_2 = 1, x_3 = 1\}$ *due rette di* $\mathbb{R}^3$ *prive di punti comuni:*
i. si determini $p \in r$ *e* $q \in s$ *tali che* $\|p - q\|_2 \leq \|x - y\|$ *per ogni* $x \in r$ *e* $y \in s$,
ii. si verifichi che la retta per p *e* q *è ortogonale alle due rette* r *ed* s.

Discussione. Prima di iniziare l'esercizio notiamo che la richiesta i consiste nel trovare il minimo assoluto della funzione distanza tra due punti appartenenti alle due rette, quindi prima di cominciare dovremmo chiederci se e perché esiste tale minimo. Notiamo che r ha giacitura $\langle(1,1,0)\rangle$ mentre s ha $\langle(1,-1,0)\rangle$, quindi le due rette sono sghembe e non parallele. Questo implica che se almeno uno tra $\|p\|_2$ e $\|q\|_2$ tende a $+\infty$, la distanza tra i due punti diverge (equivalentemente la funzione distanza $\|p-q\|_2$ è coercitiva in questo caso). Restringendo il problema alla porzione di rette contenute in una scatola $[-2,2]^3$ il problema (per Weierstrass) possiede un minimo assoluto e tale minimo sarà un minimo assoluto per il problema sulle rette intere: questa affermazione sarà chirita nel primo approccio risolutivo proposto.
Con un certo intento didattico proponiamo e sviluppiamo due approcci differenti per risolvere il problema. Poiché $p \in r$ e $q \in s$ possiamo sfruttare le equazioni cartesiane delle rette per scrivere che $p = (p_1, p_1, 0)$ e che $q = (q_1, 1 - q_1, 1)$, il che significa che

$$\|p - q\|_2^2 = \left[(p_1 - q_1)^2 + (p_1 - 1 + q_1)^2 + (1 - 0)^2\right] =: f(p_1, q_1) \qquad (p_1, q_1) \in \mathbb{R}^2$$

il problema di minimo si riconduce alla ricerca del minimo assoluto di $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi abbiamo

$$f(p_1, q_1) = 2[p_1^2 + q_1^2 - p_1 - q_1 + 1] \qquad \text{e} \qquad \nabla f(p_1, q_1) = 2(2p_1 - 1, 2q_1 - 1)$$

Si noti che

$$f(p_1,q_1) = 2[p_1^2 + q_1^2 - p_1 - q_1 + 1] \geq p_1^2 + q_1^2 + 2 = \|(p_1,q_1)\|_2^2 \qquad \text{per ogni } (p_1,q_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus [0,1]^2$$

quindi, come accennato sopra, f possiede un unico punto critico, che deve essere un punto di minimo assoluto, tale punto è (1/2, 1/2) e fornisce la seguente coppia di punti per il problema iniziale

$$p_m = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \qquad q_m = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Volendo usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange dobbiamo studiare i punti critici liberi della seguente funzione di Lagrange dove è possibile riconoscere la distanza (al quadrato) tra i punti p e q e le quattro equazioni che individuano le due rette moltiplicate per il rispettivo moltiplicatore

$$L(p,q,c) = (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2 - c_1(p_1 - p_2) - c_2 p_3 - c_3(q_1 + q_2 - 1) - c_4(q_3 - 1)$$

calcoliamo le derivate parziali della funzione per cercare i punti critici

$$\begin{array}{lll} \partial_1 L(p,q,c) = 2(p_1 - q_1) - c_1 & \partial_2 L(p,q,c) = 2(p_2 - q_2) + c_1 & \partial_3 L(p,q,c) = 2(p_3 - q_3) - c_2 \\ \partial_4 L(p,q,c) = 2(q_1 - p_1) - c_3 & \partial_5 L(p,q,c) = 2(q_2 - p_2) - c_3 & \partial_6 L(p,q,c) = 2(q_3 - p_3) - c_4 \\ \partial_7 L(p,q,c) = p_2 - p_1 & \partial_8 L(p,q,c) = p_3 & \partial_9 L(p,q,c) = 1 - q_1 - q_2 \quad \partial_{10} L(p,q,c) = 1 - q_3 \end{array}$$

Dal precedente sistema possiamo compiere subito le seguenti deduzioni

$$\begin{array}{rcl} \partial_7 L(p,q,c) = 0 & \text{implica} & p_2 = p_1 \\ \partial_8 L(p,q,c) = 0 & \text{implica} & p_3 = 0 \\ \partial_{10} L(p,q,c) = 0 & \text{implica} & q_3 = 1 \\ \partial_9 L(p,q,c) = 0 & \text{implica} & q_1 + q_2 = 1 \\ \partial_1 L(p,q,c) + \partial_2 L(p,q,c) = 0 & \text{implica} & p_1 + p_2 = q_1 + q_2 \\ \partial_4 L(p,q,c) - \partial_5 L(p,q,c) = 0 & \text{implica} & p_1 - p_2 = q_1 - q_2 \end{array}$$

e le precedenti relazioni producono le seguenti catene di conseguenze

$$p_1 = p_2 \quad \text{e} \quad p_1 + p_2 = q_1 + q_2 = 1 \quad \text{danno} \quad p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$$

$$q_1 - q_2 = p_1 - p_2 = 0 \quad \text{e} \quad q_1 + q_2 = 1 \quad \text{danno} \quad q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$$

quindi otteniamo la coppia di punti critici

$$p_m = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \qquad q_m = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

in perfetto accordo con il primo metodo! ■

Esercizio 7. *Data la funzione* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *di legge* $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$, *si spieghi perché tale funzione è differenziabile in tutto il piano e si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto* $(1, 1, f(1, 1))$

Discussione. La funzione è un polinomio e quindi, come visto a lezione, di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, in particolare è derivabile con derivate parziali continue, conseguentemente differenziabile in tutto il piano per il teorema del differenziale totale. Possiamo scrivere subito che

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = 2x_1 x_2^2 \qquad \text{e} \qquad \partial_2 f(x_1, x_2) = 2x_1^2 x_2$$

e, ricordando che in generale l'equazione del piano tangente è $x_3 = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p)$, ottenere l'equazione del piano tangente richiesta

$$x_3 = 1 + (2,2) \cdot (x_1 - 1, x_2 - 1) \qquad \text{cioè} \qquad 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3 = 0$$

visto che nel nostro caso p = (1, 1). ■

Esercizio 8. *Data* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *sia* $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *definita come* $F(x) := Mx \cdot x$. *Si spieghi perché* F *è differenziabile, poi si calcoli* $\nabla F(x)$, $HF(x)$ *e il polinomio di Taylor, di grado* 1 *e* 2, *con* $x_O = O$.

Discussione. Osserviamo subito che, posto $M = (m_{ij})$, vale

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j \cdot x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_jx_i = \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}x_jx_i$$

quindi F è un polinomio composto di termini quadratici, cioè una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, quindi è differenziabile in tutto lo spazio per il teorema del differenziale totale.
Procediamo con il calcolo del vettore gradiente e della martice hessiana della funzione F, in modo da ottenere

$$\nabla F(x) = \left(\partial_1 \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}x_jx_i; \dots; \partial_n \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}x_jx_i\right) = \begin{pmatrix} 2m_{11}x_1 + (m_{12}+m_{21})x_2 + \dots + (m_{1n}+m_{n1})x_n \\ (m_{21}+m_{12})x_1 + 2m_{22}x_2 + \dots + (m_{2n}+m_{n2})x_n \\ \vdots \\ (m_{n1}+m_{1n})x_1 + (m_{n2}+m_{2n})x_2 + \dots + 2m_{nn}x_n \end{pmatrix} = (M + M^T)x$$

$$HF(x) = \begin{pmatrix} 2m_{11} & (m_{12}+m_{21}) & \dots & (m_{1n}+m_{n1}) \\ (m_{21}+m_{12}) & 2m_{22} & \dots & (m_{2n}+m_{n2}) \\ \vdots & & & \\ (m_{n1}+m_{1n}) & (m_{n2}+m_{2n}) & \dots & 2m_{nn} \end{pmatrix} = (M + M^T)$$

Dalle precedenti relazioni ricaviamo che

$$T_{1,F}(x, O) = F(O) + \nabla F(O) \cdot x = 0$$

$$T_{2,F}(x, O) = F(O) + \nabla F(O) \cdot x + \frac{1}{2}[HF(O)x] \cdot x = \frac{1}{2}\left[(M + M^T)x\right] \cdot x$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2m_{11}x_1 + (m_{12}+m_{21})x_2 + \dots + (m_{1n}+m_{n1})x_n \\ (m_{21}+m_{12})x_1 + 2m_{22}x_2 + \dots + (m_{2n}+m_{n2})x_n \\ \vdots \\ (m_{n1}+m_{1n})x_1 + (m_{n2}+m_{2n})x_2 + \dots + 2m_{nn}x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F(x)$$

il che conclude lo svolgimento. ■

Esercizio 9. *Sia* $E = \{x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$, *si provi che*
i. E *è chiuso e limitato,*
ii. che esistono su E *un punto di massima distanza e un punto di minima distanza da* O.

Discussione. i. Osserviamo subito che

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 : g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 = 1\} = g^{-1}(\{1\})$$

e siccome $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, E è chiuso perché controimmagine di un chiuso, tramite una funzione continua. Inoltre possiamo scrivere che

se	$x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 = 1$	allora	$x_1^2 \le 1$	cioè	$-1 \le x_1 \le 1$
se	$x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 = 1$	allora	$4x_2^2 \le 1$	cioè	$-1/2 \le x_2 \le 1/2$
se	$x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 = 1$	allora	$9x_3^2 \le 1$	cioè	$-1/3 \le x_3 \le 1/3$

quindi E è limitato visto che

$$E \subseteq [-1, 1] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \subseteq B(O, 2)$$

ii. Essendo E chiuso e limitato, cioè compatto, e la distanza da O una funzione continua il teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di punti di massimo e minimo assoluti: tali punti possono essere identificati tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Osserviamo che la funzione distanza è una funzione non negativa, quindi i

punti che realizzano massimi e minimi (locali e globali) sono gli stessi della funzione distanza al quadrato, per cui consideriamo la distanza al quadrato, di più facile trattazione.
Dunque la funzione di Lagrange è

$$L(x_1, x_2, x_3, p) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - p\left(x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 - 1\right)$$

e le sue derivate parziali sono

$$\begin{aligned}
&\partial_1 L(x_1, x_2, x_3, p) = 2x_1 - 2px_1 = 2(1-p)x_1 \\
&\partial_2 L(x_1, x_2, x_3, p) = 2x_2 - 8px_2 = 2(1-4p)x_2 \\
&\partial_3 L(x_1, x_2, x_3, p) = 2x_3 - 18px_1 = 2(1-9p)x_3 \\
&\partial_4 L(x_1, x_2, x_3, p) = 1 - x_1^2 - 4x_2^2 - 9x_3^2
\end{aligned}$$

Per trovare i punti $(x_1, x_2, x_3, p) \in \mathbb{R}^4$ che annullano il vettore gradiente di L possiamo fare le seguenti considerazioni

$$\begin{array}{lllll}
\text{se} & p = 1 & \text{allora} & x_2 = x_3 = 0 & \text{e} \quad x_1 = \pm 1 \\
\text{se} & p = 1/4 & \text{allora} & x_1 = x_3 = 0 & \text{e} \quad x_2 = \pm 1/2 \\
\text{se} & p = 1/9 & \text{allora} & x_1 = x_2 = 0 & \text{e} \quad x_3 = \pm 1/3
\end{array}$$

quindi abbiamo ottenuto i seguenti punti critici vincolati

$$a_\pm = (\pm 1, 0, 0) \qquad b_\pm = (0, \pm 1/2, 0) \qquad c_\pm = (0, 0, \pm 1/3)$$

e poiché vale

$$\|a_\pm\|_2^2 = 1 \qquad \|b_\pm\|_2^2 = \frac{1}{4} \qquad \|c_\pm\|_2^2 = \frac{1}{9}$$

possimo concludere che $a_\pm$ sono due punti di massimo globale, $c_\pm$ due punti di minimo assoluto, mentre $b_\pm$ sono due punti di sella. ■

Esercizio 10. *Siano* $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, per* $i = 1, ..., n$*, delle funzioni assegnate.*
i. Provare che se $f_i \in C(\mathbb{R})$*, per* $i = 1, ..., n$*, allora la funzione*

$$F(x) := f_1(x_1) + ... + f_n(x_n) \qquad x = (x_1, ... x_n) \in \mathbb{R}^n$$

è continua in tutto lo spazio,
ii. provare che se $f_i \in C^1(\mathbb{R})$*, per* $i = 1, ..., n$*, allora la funzione* F *(definita nel punto i.) è derivabile in ogni direzione e in tutto lo spazio,*
iii. si scriva l'espressione di $\partial_w f(x)$ *con* $x, w \in \mathbb{R}^n$*.*

Discussione. i. L'ipotesi di continuità delle funzioni f_i equivale a dire che se $\{p_n\} \subseteq \mathbb{R}$ è una successione convergente tale che $p_n \longrightarrow p_0$ allora abbiamo che

$$f_i(p_n) \longrightarrow f_i\left(p_0\right) \qquad \text{per ogni } i = 1, ..., n$$

allora consideriamo una successione di punti $\{x_k\}$ convergente in $\mathbb{R}^n$ tale che $x_k \longrightarrow x_0$, siccome questo equivale a dire che

$$0 \le |x_{k,i} - x_{0,i}| \le \left[\sum_{i=1}^{n} \left(x_{k,i} - x_{0,i}\right)^2\right]^{1/2} \qquad \text{per ogni } i = 1, ..., n$$

possiamo affermare che $x_{k,i} \longrightarrow x_{0,i}$ per ogni $i = 1, ..., n$, allora otteniamo, grazie alla disuguaglianza triangolare, che

$$0 \le \|F(x_k) - F(x_0)\|_2 \le \sum_{i=1}^{n} \left|f_i(x_{k,i}) - f_i(x_{0,i})\right| \longrightarrow 0$$

dove i termini a destra sono tutti infinitesimi per la precedente osservazione.

ii. & iii. Per mostrare la derivabilità della funzione F procediamo scrivendo il rapporto incrementale nella direzione $w \in \mathbb{R}^n$ come segue

$$\frac{F(x+tw)-F(x)}{t} = \frac{1}{t}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i+tw_i) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(x_i+tw_i)-f_i(x_i)}{t} \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i f_i'(x_i) = \partial_w F(x)$$

dove l'ultimo passaggio è conseguenza della derivabilità delle funzioni f_i, passando al limite per $t \longrightarrow 0$. Si noti che abbiamo anche ottenuto che $\partial_i F(x) = f_i'(x_i)$ e che $\nabla F(\mathbf{x}) = \big(f_1'(x_1), ..., f_n'(x_n)\big)$. ■

Esercizio 11. *Sia* $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definita come* $F(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2)$.
i. F *è iniettiva? Si calcoli lo jacobiano dell'applicazione.*
ii. Sia $C_r = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = r^2\}$, *determinare, per* $r > 0$, $F(C_r)$, *cioè l'immagine di* C_r *tramite* F.
iii. Determinare $F(\mathbb{R}^2)$, *cioè l'immagine della funzione* F.

Discussione. i. F non è iniettiva essendo per esempio $F(1,1) = F(-1,1)$, inoltre vale

$$JF(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

ii. Chiaramente se $(x_1, x_2) \in C_r$ la prima coordinata del punto $F(x_1, x_2)$ è r^2. Inoltre la seconda coordinata è compresa tra $-r^2$ e r^2 poiché vale $-r^2 \leq -(x_1^2 + x_2^2) \leq x_1^2 - x_2^2 \leq x^2 + y^2 \leq r^2$. Riassumendo $F(C_r)$ è il segmento verticale di ascissa $x_1 = r^2$ e ordinate $-r^2 \leq x_2 \leq r^2$.
iii. Siccome al variare di $r \geq 0$ le circonferenze C_r coprono tutto il piano $\mathbb{R}^2$, ragionando per unioni possiamo dedurrre che $F(\mathbb{R}^2) = \bigcup_{r\geq 0} F(C_r)$ e da ii. otteniamo che $F(\mathbb{R}^2) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0 \text{ e } -x_1 \leq x_2 \leq x_1\}$. ■

Esercizio 12. *Determinare (se esiste) il massimo assoluto della funzione* $f(x_2, x_2, x_3) = x_1x_2x_3^3$ *nella regione dello spazio* $D = \{x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^6 \leq 6\}$.

Discussione. D è un insieme compatto in quanto è limitato, perché contenuto nel parallelepipedo $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}] \times [-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2] \times [-\sqrt[6]{3}, \sqrt[6]{3}]$, ed è chiuso, in quanto $D = F^{-1}([0,6])$, con $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^6$ funzione continua e $[0,6]$ chiuso in $\mathbb{R}$.
Quindi, per il Teorema di Weierstrass, applicato alla funzione continua f, f ammette massimo assoluto in D.
Per determinare il punto di massimo assoluto cerchiamo innanzitutto gli eventuali punti critici interni di f, cioè i punti in $\mathrm{int}(D) = \{x^2 + 4y^2 + 2z^6 < 6\}$ tali che $\nabla f = (0,0,0)$.

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (x_2x_3^3, x_1x_3^3, 3x_1x_2x_3^2)$$

quindi tutti i punti critici della funzione f sono del tipo $(0,0,z)$, con $z \in \mathbb{R}$, e $(x,y,0)$, con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
In corrispondenza di tali punti la funzione f si annulla, perciò, dato che la funzione assume anche valori positivi, il massimo assoluto di f in D deve essere assunto sulla frontiera $\partial D = \{F(x) = 6\}$. Per determinare i punti critici di f ristretta a ∂D utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, risolviamo cioè il sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla F(x) \\ F(x) = 6 \end{cases} \qquad \text{per esteso} \qquad \begin{cases} x_2x_3^3 = 2\lambda x_1 \\ x_1x_3^3 = 8\lambda x_2 \\ 3x_1x_2x_3^2 = 12\lambda x_3^5 \\ x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^6 = 6 \end{cases}$$

Il massimo assoluto non è assunto in punti aventi una delle componenti nulla, quindi dal sistema otteniamo

$$\begin{cases} \dfrac{x_2x_3^3}{2x_1} = \dfrac{x_1x_3^3}{8x_2} = \dfrac{x_1x_2}{4x_3^3} \\ x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^6 = 6 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} x_1^2 = 4x_2^2 \\ x_3^6 = 2x_2^2 \\ 2x_2^2 = 1 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} x_1 = \pm\sqrt{2} \\ x_2 = \pm\sqrt{2}/2 \\ x_3 = \pm 1 \end{cases}$$

Confrontando i valori di f negli otto punti trovati deduciamo che il massimo assoluto di f vale 1 ed è assunto nei punti di coordinate $(\sqrt{2}, \sqrt{2}/2, 1)$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}/2, 1)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}/2, -1)$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}/2, -1)$. ■
