Domani: 15:30 → 18:00 Analisi I

↑ precise

18:00 → 19:00 Lab. Mat.

TEOREMA Supponiamo f continua in $[x_0, b)$ | $(a, x_0]$
f derivabile in (x_0, b). | (a, x_0)

Se $\exists \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$

allora $f'_+(x_0) = \ell$.

se $\exists \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$

$\Rightarrow f'_-(x_0) = \ell$.

Stavamo studiando la derivabilità di

$$f(x) = \sqrt{2\sin x - 1} \qquad \text{periodica di periodo } 2\pi.$$

dominio $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

f è continua.

f è derivabile? sicuramente sì in $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right)$

$$f'(x) = \frac{2\cos x}{2\sqrt{2\sin x - 1}} = \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x - 1}} \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right).$$

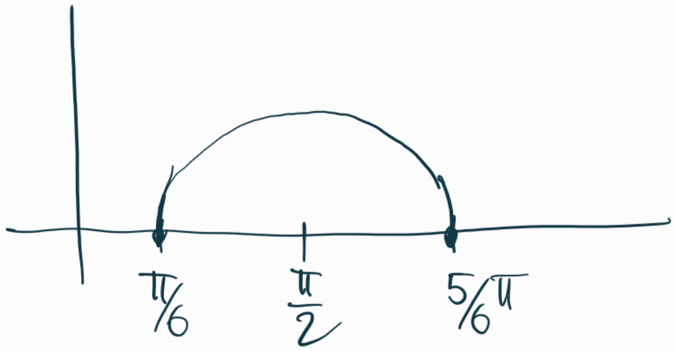
Derivabilità in $x = \frac{\pi}{6}$

$$f'_+\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}^+} f'(x) = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{6}\right)^+} \frac{\overbrace{\cos x}^{\to\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\underbrace{\boxed{\sqrt{2\sin x - 1}}}_{\to 0^+}} = +\infty$$

punto di non derivabilità (pto a tg. verticale).

$$f'_-\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \lim_{x\to\left(\frac{5}{6}\pi\right)^-} f'(x) = \lim_{x\to\left(\frac{5}{6}\pi\right)^-} \frac{\overset{\to -\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos x}}{\underset{\to 0^+}{\boxed{\sqrt{2\sin x - 1}}}} = -\infty$$

punto di non derivabilità (pto a tg. verticale)



Questo metodo si poteva utilizzare anche in casi già visto

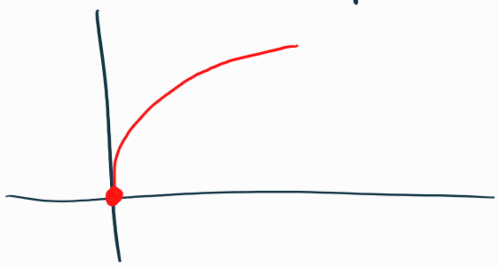
$f(x) = \sqrt{x}$ dominio $[0, +\infty)$

continua.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\forall x \in (0, +\infty)$

$x = 0$? $f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$

$\Rightarrow$ $x = 0$ pto di non derivabilità (pto a tg. verticale)



$f(x) = x\,|x|$ continua in $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0 \\ -2x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

$x=0$?

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} 2x=0 \\ f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} (-2x)=0 \end{array}\right| \Rightarrow f'(0)=0$$

$f(x)=x^{2/5}$ continua in $\mathbb{R}$.

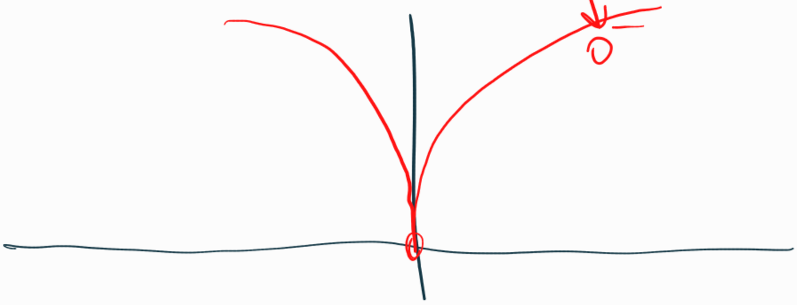
$f'(x)=\frac{2}{5}x^{-3/5}$ se $x\neq 0$.

$x=0$?

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{5}\frac{1}{\underbrace{x^{3/5}}_{\to 0^+}}=+\infty$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{5\underbrace{x^{3/5}}_{\to 0^-}}=-\infty$$

$x=0$ cuspide



Attenzione: per applicare questo limite, devono essere vere due ipotesi

- f continua in x_0.
- deve esistere $\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

è derivabile anche in $x_0 = 0$ (visto ieri!)

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\Big(\underbrace{2x\sin\frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\text{non ha limite}}\Big) \nexists$$

$$\| \\ 0$$

NO non vale l'uguaglianza perché il limite non esiste

Esercizio di esame:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+2x^2)}{x} & \text{se } x < 0 \\ \alpha x^4 + \beta \sin(2\pi x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Trovare i valori $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c.

a) f continua in $\mathbb{R}$.

b) f derivabile in $\mathbb{R}$

c) - - - -

d) — —

a) f continua per $x \neq 0$.

Continuità in 0:

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ ovvio!
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) \stackrel{?}{=} f(0) = 0$

$\|$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\log(1+2x^2)}{x} \sim 2x^2 = 0$$

f è continua in tutto $\mathbb{R}$ $\quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) f derivabile in $\mathbb{R}$? deve essere continua, ma questo è vero $\forall \alpha, \beta$.

f sicuramente derivabile per $x \neq 0$.

se $x<0$
$$f'(x) = \left(\frac{\log(1+2x^2)}{x}\right)' = \frac{\frac{4x}{1+2x^2}\cdot x - \log(1+2x^2)\cdot 1}{x^2} =$$

$$= \frac{4x^2 - (1+2x^2)\log(1+2x^2)}{x^2(1+2x^2)}$$

se $x>0$, $f'(x) = (\alpha x^4 + \beta \sin(2\pi x))' =$

$$= 4\alpha x^3 + 2\pi\beta \cos(2\pi x)$$

$\boxed{x=0}$

$$f'_+(0) = 2\pi\beta$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{4x^2 - (1+2x^2)\log(1+2x^2)}{x^2(1+2x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x^2}\left[4 - \underbrace{(1+2x^2)}_{\to 1} \boxed{\frac{\log(1+2x^2)}{x^2}}_{\to 2}\right] \sim 2x^2}{\cancel{x^2}\,(1+2x^2)} = 2$$

Oppure: $\quad f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - \cancel{f(0)}}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\log(1+2h^2)}{h^2} = 2. \qquad \text{(più facile)}$$

f derivabile $\iff f'_+(0) = f'_-(0)$

$$2\pi\beta = 2$$

$$\boxed{\beta = \frac{1}{\pi}} \qquad \boxed{\alpha \text{ qualsiasi}}$$

Teorema (derivata della f. inversa).

Siano I intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua e strett. monotòna.

(Quindi: $\operatorname{im} f = J$ intervallo, $f: I \to J$ biettiva.

$\exists\, f^{-1}: J \to I$ strett. monotòna e continua)

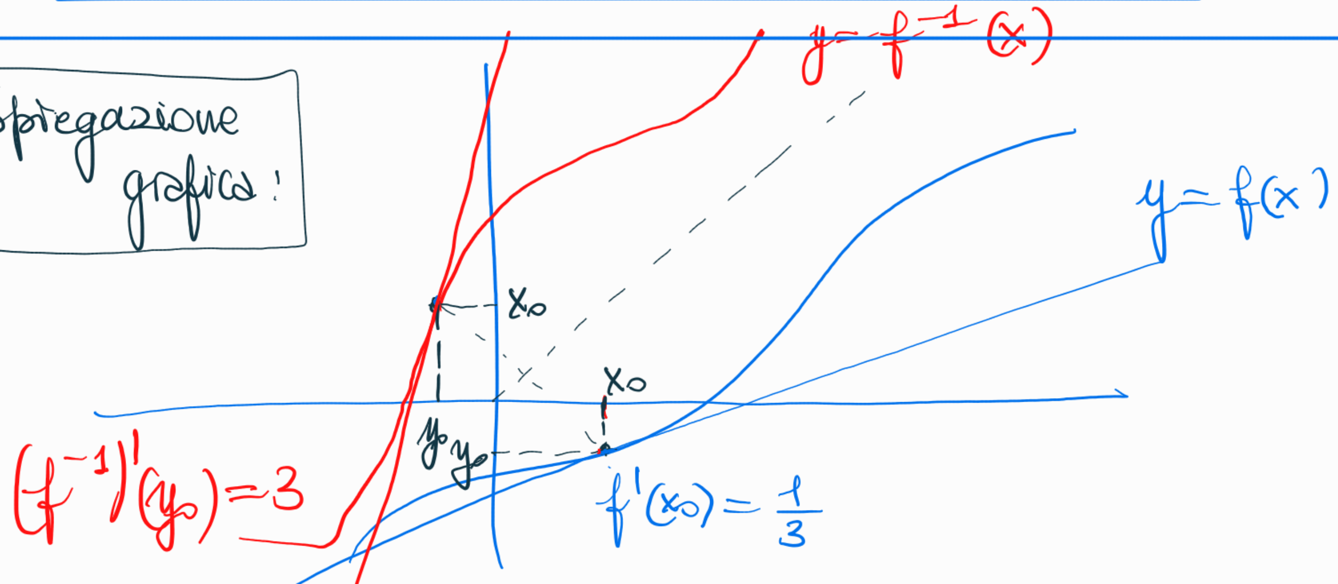
Se f è derivabile in $x_0 \in I$, e $f'(x_0) \neq 0$, allora

f^{-1} è derivabile in $\underbrace{y_0 = f(x_0)}_{\Updownarrow}$, e si ha.

$x_0 = f^{-1}(y_0)$

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}}$$

Spiegazione grafica!



Esempio $\quad f(x) = 1 + 2x + x^5 \; : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biiettiva

~~continua~~, derivabile, e strett. crescente

$\exists \; f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strett. crescente e continua.

Purtroppo f^{-1} non sappiamo scriverla in forma esplicita

$1 + 2x + x^5 = y$ non so risolverla in x

Il teorema mi dice che, poiché $f'(x) = 2 + 5x^4 > 0$.

$f^{-1}(y)$ è derivabile $\quad \forall y \in \mathbb{R}$, e si ha

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

dove $f(x) = y$, cioè $x = f^{-1}(y)$

La formula non è esplicita perché non conosco f^{-1}.
Però per certi valori di y diventa esplicita.

$$f(0) = 1 \iff f^{-1}(1) = 0$$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \left.\frac{1}{2 + 5x^4}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

$$f(1) = 4 \iff f^{-1}(4) = 1$$

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \left.\frac{1}{2 + 5x^4}\right|_{x=1} = \frac{1}{7}$$

Prendiamo $f(x) = x^2 : (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$
strett. crescente, biiettiva, derivabile, $f'(x) = 2x > 0$

$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

$(\sqrt{y})' = (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ come doveva essere!

$y = x^2$
$x = \sqrt{y}$

$\forall y > 0$

$f(x) = e^x : \mathbb{R} \longrightarrow (0,+\infty)$
biiettiva, derivabile, strett. crescente $\qquad f'(x) = e^x > 0$

$f^{-1}(y) = \log y$

$(\log y)' = (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{y}$ $\boxed{\forall y > 0}$

$y = e^x$
$x = \log(y)$

come sapevamo già!

$f(x) = \sin x \Big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$.

f è biiettiva, strett. crescente, derivabile,
$f'(x) = \cos x > 0$ per $x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$
$\Downarrow$
$y \in (-1,1)$

$f^{-1}(y) = \arcsin y : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$\boxed{\forall y \in (-1,1)}$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$y = \sin x$

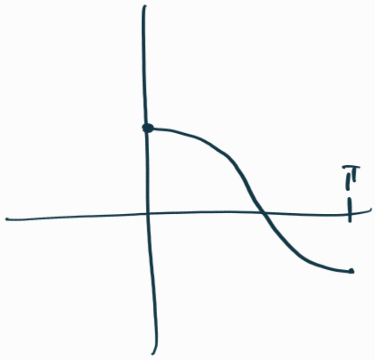
$x = \arcsin y$

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = $$
$$= \sqrt{1-\sin^2 x}$$

ho scelto il "+" perché $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dove $\cos$ è >0

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1,1).}$$

$\cos\big|_{[0,\pi]} x : [0,\pi] \to [-1,1]$



biiettiva, strett. decrescente, $f'(x) = -\sin x < 0$

$\forall x \in (0,\pi)$

$\Updownarrow$

$y \in (-1,1)$

$\exists\, f^{-1}(y) = \arccos y : [-1,1] \to [0,\pi]$.

strett. decresc., continua.

Il teorema dice

$\forall y \in (-1,1)$

$$(\arccos)'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$y = \cos x$

$x = \arccos y$

<u>oss.</u> $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$

$= \sqrt{1-\cos^2 x}$

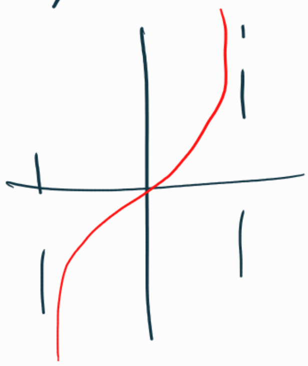
perché $\sin x > 0$ in $(0,\pi)$

Riscrivo

$$\boxed{\forall x \in (-1,1) \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\operatorname{tg} x\Big|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} : \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

strett. crescente, biiettiva, derivabile



$$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x > 0$$

$$\exists\ f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Il teorema ci dice che $\forall y \in \mathbb{R}$

$$\exists\ (\operatorname{arctg} y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

$y = \operatorname{tg} x$

$x = \operatorname{arctg} y$

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

<u>Dim teorema</u>.

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = (*)$$

Poniamo $x_0 = f^{-1}(y_0)$, $x = f^{-1}(y) \xrightarrow[y \to y_0]{} f^{-1}(y_0) = x_0$

perché f^{-1} è continua

$y_0 = f(x_0)$ $\qquad$ $y = f(x)$

$$(*) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\boxed{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)}} = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \square$$

$f'(x_0) \neq 0$

<u>OSS</u> Estensione del teorema

$f: I \to J$ strett. crescente / decrescente, continua e biiettiva

Sia $x_0 \in I$ t.c. $f'(x_0) = 0$.

Allora f^{-1} ha in $y_0 = f(x_0)$ un pto a tg verticale

cioè $(f^{-1})'(y_0) = +\infty$ / $-\infty$

Esempio 1

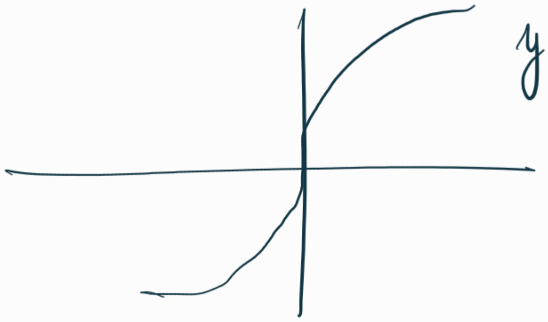
$f(x) = x^3 \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strett. crescente biiettiva

$f'(0) = 0 \qquad f(0) = 0.$

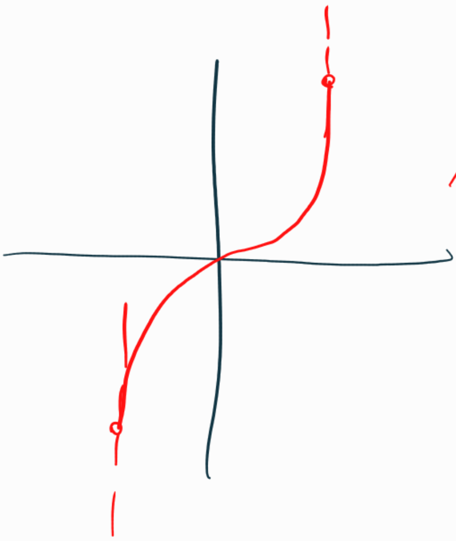
$x_0 = 0 \quad y_0 = 0$

$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$

$(f^{-1})'(0) = +\infty$



$y = \sqrt[3]{x}$



$y = \arcsin x$

$\arcsin x$ e $\arccos x$ hanno dei punti a tg. verticale in $x = \pm 1$