Dim della derivata di $\frac{f(x)}{g(x)}$

$$-\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' =$$

derivata del prodotto

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \qquad \square$$

TEOREMA (derivata di funzione composta, chain rule, regola della catena)

Siano $f: Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g: X \subseteq \mathbb{R} \to Y$

(Resta quindi definita

$$f \circ g : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(g(x))$$

Se g è derivabile in x_0, e f è derivabile in $g(x_0)$, allora $f \circ g$ è derivabile in x_0, e si ha

$$(f\circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0)$$

Esempi:

$$(\sin(x^3))' = \cos(x^3)\, 3x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$((\sin x)^3)' = 3(\sin x)^2 \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(e^{-x})' = e^{-x}(-1) = -e^{-x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{(\log|x|)' = \left\{\begin{array}{lll}(\log x)' = \dfrac{1}{x} & & x>0 \\ \log(-x) = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x} & & x<0\end{array}\right\} = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0}$$

Più sintetico:

$$(\log|x|)' = \frac{1}{|x|}\cdot(|x|)' = \frac{\overbrace{\operatorname{sign} x}^{\frac{x}{|x|}}}{|x|} = \frac{1}{x}$$

$$(\operatorname{tg}(3x-5))' = \frac{3}{\cos^2(3x-5)}$$

<u>OSS</u> $\quad (f(ax+b))' = a f'(ax+b)$

$$(\cos(4x+2))' = -4\sin(4x+2)$$

<u>Dim.</u> con l'ipotesi aggiuntiva che g sia strett. monotòna in un intorno di x_0.

$$(f\circ g)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \boxed{\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{\underbrace{g(x_0+h) - g(x_0)}_{\neq 0}}}_{\to f'(g(x_0))} \; \boxed{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ g'(x_0)}} =$$

perché g strett. monotòna

$$= f'(g(x_0))\, g'(x_0)$$

$$\frac{f(g(x_0+h)) - \overbrace{f(g(x_0))}^{f(y_0)}}{\underbrace{g(x_0+h)}_{\substack{\shortparallel \\ y \to g(x_0) = y_0}} - \underbrace{g(x_0)}_{\shortparallel\, y_0}} = \lim_{y\to y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = f'(y_0) = f'(g(x_0))$$

$\square$

Il caso generale si dimostra con poca più difficoltà.

$$(x^x)' = \left(e^{x\log x}\right)' = \underbrace{e^{x\log x}}_{x^x}\,(x\log x)' =$$

$$= x^x\left(\log x + x\,\frac{1}{x}\right) = x^x\,(\log x + 1) \qquad \forall x > 0$$

Questo metodo va usato per calcolare derivate della forma $\left((f(x))^{g(x)}\right)'$

Tutte le funzioni ottenute da funzioni derivabili mediante le 4 operazioni e composizioni sono derivabili nel loro dominio, per es.

$$f(x) = \frac{\log(x^4+3x^2+7)\,\sin(e^x)}{x^2 + \left(\mathrm{tg}\left(\frac{3}{1+x^2}\right)\right)^3} \quad \text{è derivabile nel suo dominio}$$

Studio della derivabilità di funzioni in casi in cui non è ovvio.

$$f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \text{dominio}: \mathbb{R}$$

Pb. di derivabilità solo per $x = 0$ (radice, modulo).

Per $x > 0$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

per $x < 0$ $\qquad f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}}$

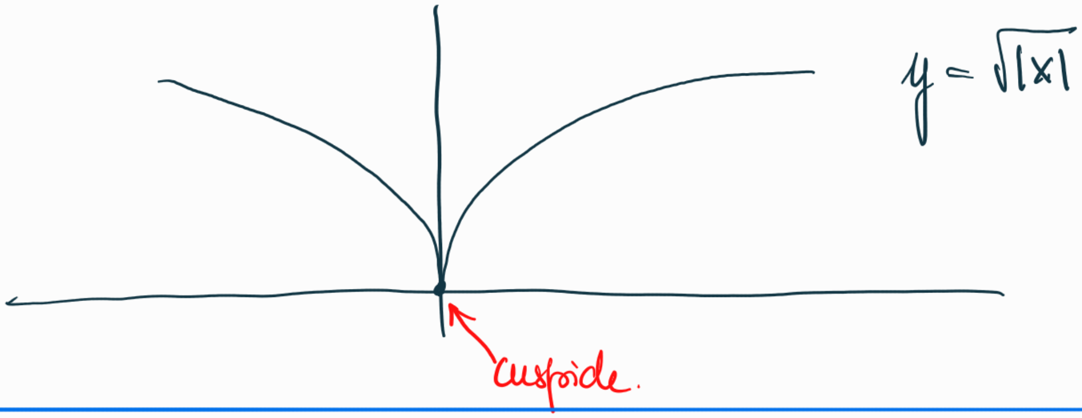
$x = 0$? Facciamo il limite del rapporto increm.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - \cancel{f(0)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{|h|}}{h} \quad \nexists$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{h}}_{\to 0^+}} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{-h}}{h} = \lim_{h \to 0^-} \left(-\frac{1}{\sqrt{-h}} \right) = -\infty.$$

$$h = -(-h) = -\left(\sqrt{-h}\right)^2$$

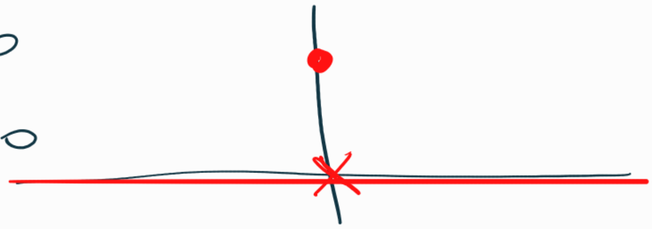


DEF $(x_0, f(x_0))$ si dice $\boxed{\text{punto di cuspide}}$ del grafico di f se:

1) f è continua in x_0
2) $f'_+(x_0) = +\infty$ e $f'_-(x_0) = -\infty$ (o viceversa)

Si deve richiedere f continua altrimenti...

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x\neq 0 \\ 1 & \text{se } x=0 \end{cases}$$



$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{\overset{0}{f(h)}-\overset{1}{f(0)}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-1}{h}=-\infty$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-1}{h}=+\infty$$

ma non è una cuspide perché f non è continua in zero.

Altro esempio:

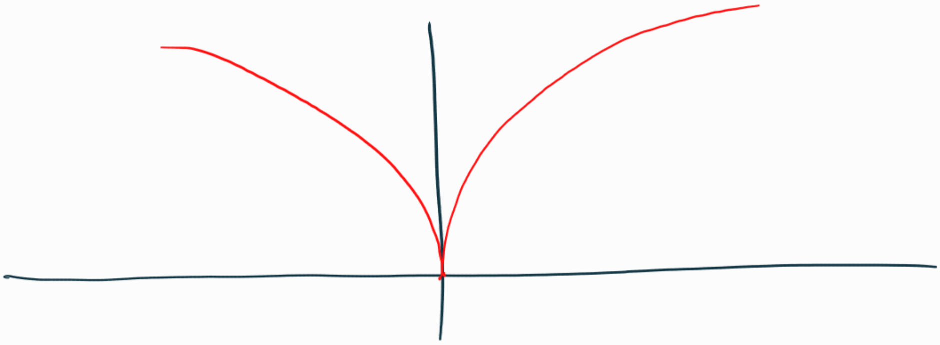
$$f(x)=x^{2/5}=\sqrt[5]{x^2} \qquad \text{dominio: } \mathbb{R},\ f \text{ continua in } \mathbb{R}$$

$$f'(x)=\frac{2}{5}x^{-3/5}=\frac{2}{5x^{3/5}} \qquad \forall x\neq 0.$$

Cosa succede in $x=0$?

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{\overset{h^{2/5}}{f(h)}-\overset{0}{f(0)}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^{2/5}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^{3/5}}=+\infty$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^{2/5}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h^{3/5}}=-\infty$$



$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0 \\ -2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

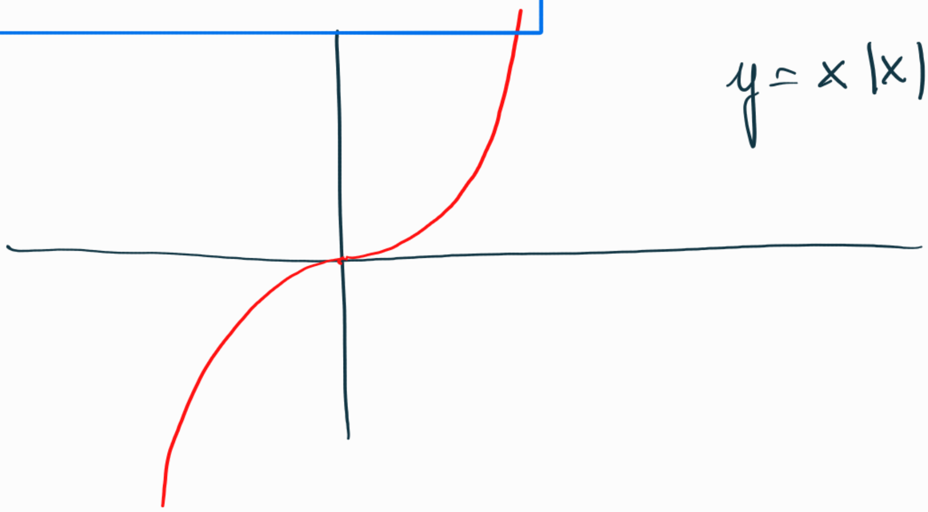
In $x = 0$?

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h|h|}{h} = \lim_{h \to 0} |h| = 0$$

Quindi f è derivabile anche in 0.

$$f'(x) = \left.\begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}\right\} = 2|x|$$

$$\boxed{(x|x|)' = 2|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$



Riassunto dei principali punti di continuità in cui f non è derivabile.

In tutti e tre i casi f deve essere continua in x_0.

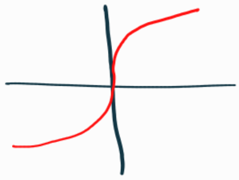
① $\boxed{\text{Pti a tangente verticale:}}$

i pti x_0 t.c. $\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = +\infty$

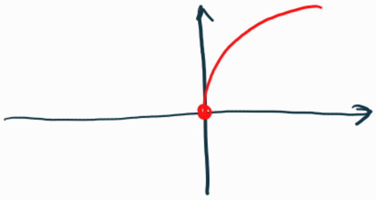
oppure

$\nexists$ " $= -\infty$

Esempi. $f(x) = x^{1/3}$ $x_0 = 0$



$f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$



(2.) $\boxed{\text{Pti angolosi}}$

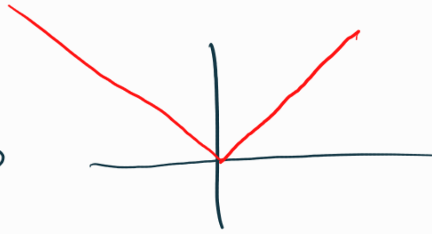
$\exists \; f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$\exists \; f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-}$ " "

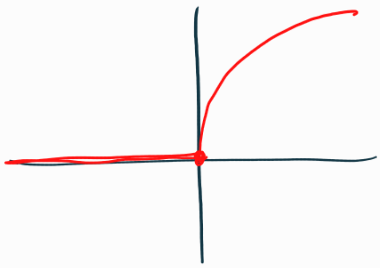
almeno uno dei due finito.

però sono diversi fra loro.

Esempio $f(x) = |x|$ $x_0 = 0$



$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$



(3.) $\boxed{\text{Cuspidi}}$

$\exists \; f'_+(x_0) = +\infty$

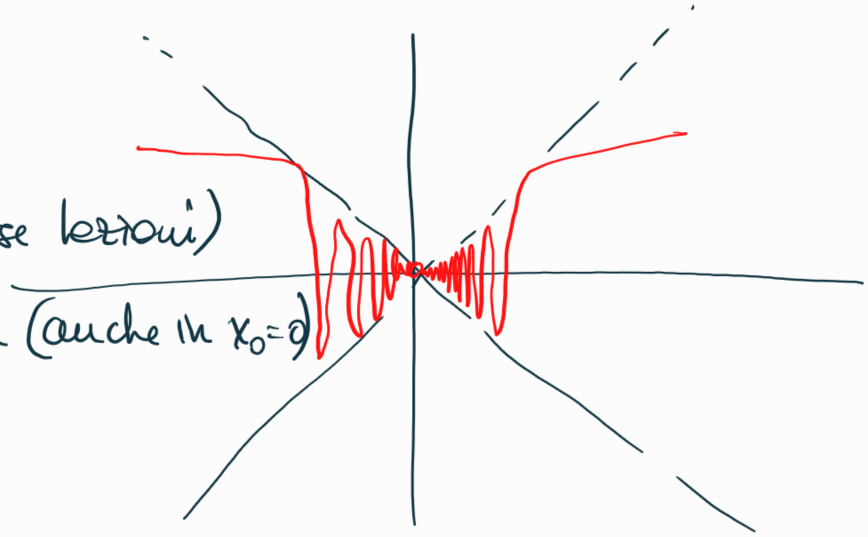
$\exists \; f'_-(x_0) = -\infty$

o viceversa.

Ma questi non esauriscono tutti i casi

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

dominio: $\mathbb{R}$.



Abbiamo già visto (scorse lezioni) che f è continua in $\mathbb{R}$ (anche in $x_0 = 0$)

<u>Derivabile?</u>

Sicuramente derivabile per $x \neq 0$,

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} + x \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \qquad x \neq 0$$

$$= \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \qquad \forall x \neq 0.$$

In $x = 0$?

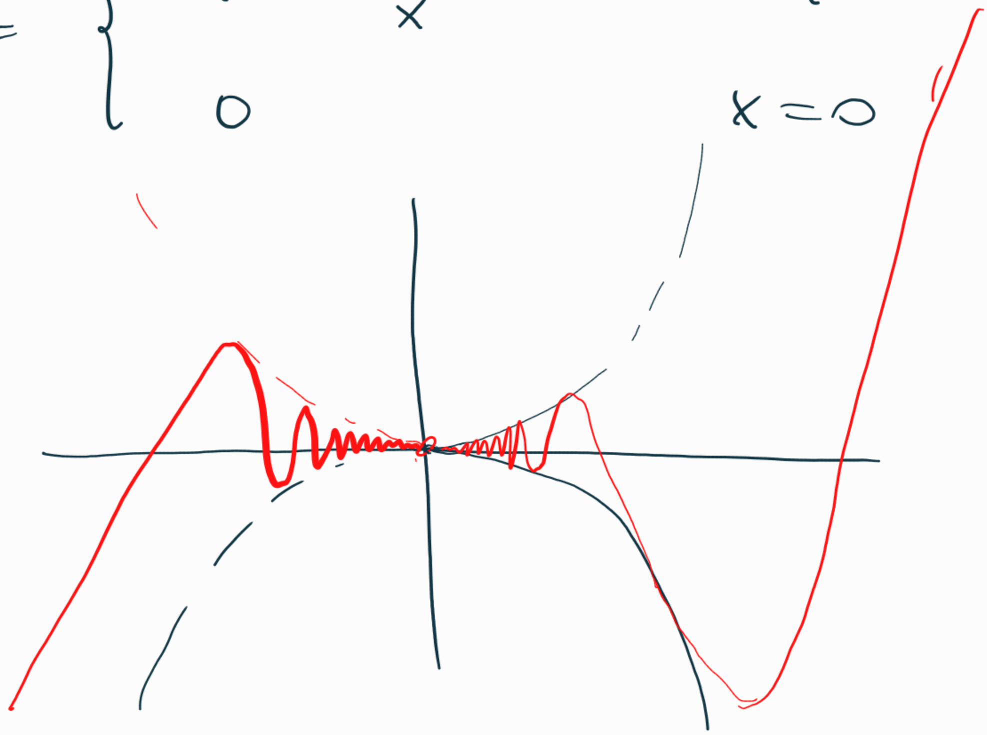
$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - \cancel{f(0)}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\cancel{h} \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{\cancel{h}} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \sin\left(\frac{1}{h}\right) \quad \nexists$$

$$f'_-(0) = \ldots\ldots \quad \nexists$$

Pto di continuità, di non derivabilità, ma non rientra nei tipi precedenti.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



Continua? Ovviamente sì per $x \neq 0$.

Per $x = 0$? $\lim_{x \to 0} f(x) \overset{?}{=} f(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \text{(limitata × infinitesima)}$$

Derivabile? Ovviamente sì per $x \neq 0$.

$$f'(x) = \left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)' = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \qquad \forall x \neq 0$$

$x = 0$? $$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - \cancel{f(0)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{\cancel{2}} \sin \frac{1}{h}}{\cancel{h}} =$$

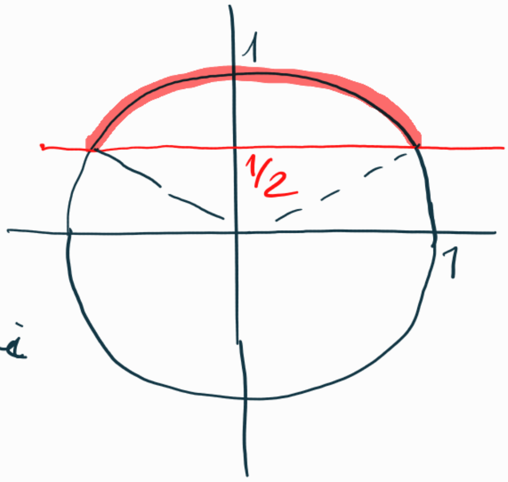
$$= \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$$

Quindi f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

$f(x) = \sqrt{2\sin x - 1}$ $\quad$ f periodica di periodo 2π.

<u>dominio:</u> $\{x \in \mathbb{R} : \sin x \geq \frac{1}{2}\} =$

$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$



Continua? sì, perché fatta per composizioni continue.

Derivabile? Non chiaro, perché $\sqrt{y}$ ha pb. di derivabilità nell'origine

Nessun pb. di derivabilità per $\operatorname{sen} x > \frac{1}{2}$,
cioè per
$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Per questi x, $\quad f'(x) = \dfrac{\cancel{2}\cos x}{\cancel{2}\sqrt{2\sin x - 1}}$

$\boxed{x = \frac{\pi}{6}}$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = f'_+\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{2\sin\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - 1} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{2\sin\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - 1}}{h} = \ldots \quad ??$$

C'è un'altra maniera per calcolare $f'_+\left(\frac{\pi}{6}\right)$, usando il seguente teorema.

TEOREMA Supponiamo f continua in $[x_0, b)$
f derivabile in (x_0, b).

Se $\exists \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$

allora $f'_+(x_0) = \ell$.