

Servono due rappresentanti per canale per partecipare all'OSS della Didattica.

Inviare nominativi a francesco.treguattini@uniroma1.it.

Derivata

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{se il limite esiste finito.}$$

$$4) \text{ Se } f(x) = x^k \Rightarrow (x^k)' = k x^{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

con lo stesso calcolo si prova

$$(*) \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \begin{array}{l} \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ \forall x > 0 \end{array}$$

Se $\alpha \in \mathbb{Q}$, e se entrambi i membri della precedente formula hanno senso, la formula (*) ha senso anche per $x < 0$ oppure per $x = 0$.

$$(x^{4/3})' = \frac{4}{3} x^{1/3} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

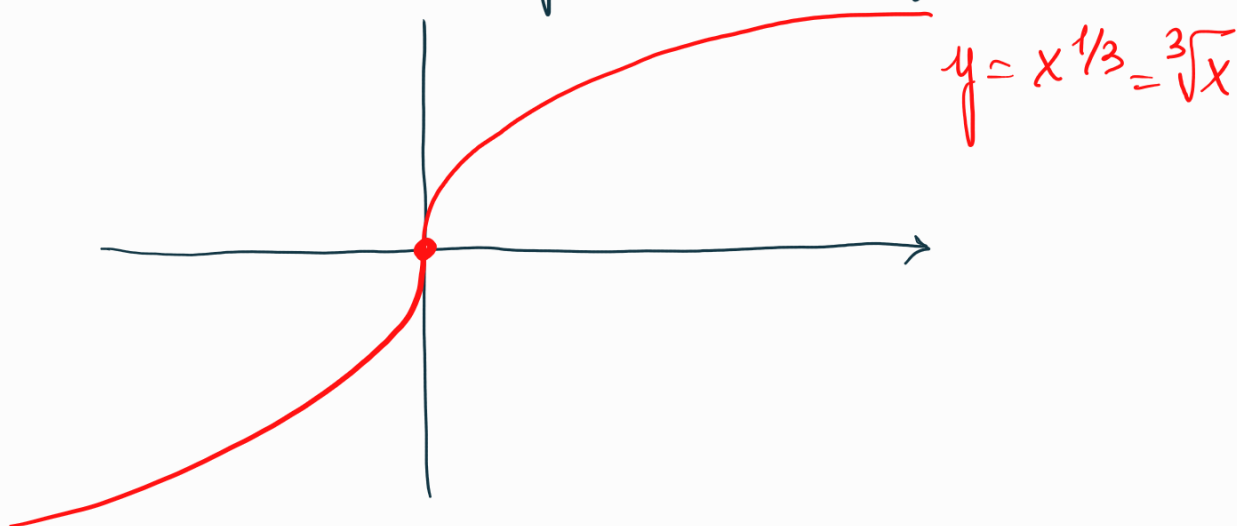
$$(x^{1/3})' = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3 x^{2/3}} \quad \forall x \neq 0.$$

Cosa succede per $x=0$?

$$\text{se } f(x) = x^{1/3}$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - \cancel{f(0)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\underbrace{h^{2/3}}_{0^+}} = +\infty$$

Quindi $x_0=0$ è un punto di non derivabilità di $f(x)=x^{1/3}$.
 Si tratta di un punto a tg. verticale del grafico.



$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

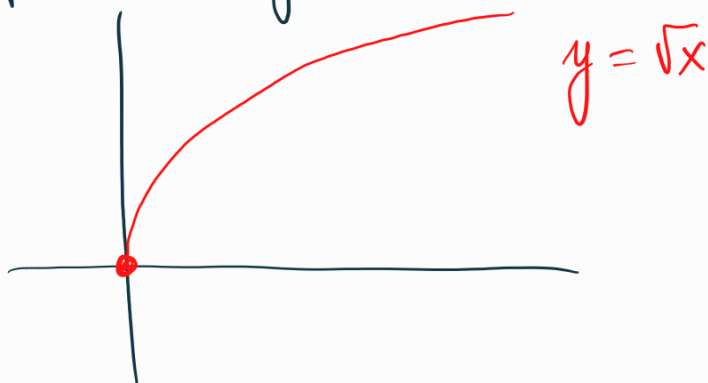
$$x \in [0, +\infty)$$

Sappiamo che $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x > 0$.

Per $x=0$?

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Si tratta di un punto a tg. verticale



$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\left(\frac{1}{x^4}\right)' = (x^{-4})' = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Esercizio: provare con calcoli elementari se $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5) $(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

$\downarrow$
1

$$(a^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = \log a \cdot a^x \quad \forall a > 0.$$

$\downarrow$
 $\log a$

5') $(a^x)' = \log a \cdot a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0$

6) $(\log x)' = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$

$$\begin{aligned} (\log x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} \stackrel{\sim \frac{h}{x}}{\sim} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{hx} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Se si usa un'altra base, il conto è leggermente diverso

6') $(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a} \quad \forall x > 0 \quad \forall a > 0, a \neq 1.$

$$\begin{aligned}
 (\log_a x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h \cdot \log a} = \frac{1}{x \log a} = \frac{\log_a e}{x}
 \end{aligned}$$

7) $(\sin x)' = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

Formula di prostaferesi $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} 2 \sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right) \cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2} \right] \left[\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \right] = \cos x
 \end{aligned}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 1 $\cos x$

7' $(\cos x)' = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

(dim. simile oppure usando $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$)

TEOREMA f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ è continua in x_0 .

(in particolare, se f non è continua in $x_0 \Rightarrow f$ non è derivabile in x_0)

OSS se $A \Rightarrow B$, allora $\neg B \Rightarrow \neg A$

Dim

$$f \text{ è derivabile in } x_0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

$$\rightarrow f(x) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{\substack{\downarrow x \rightarrow x_0 \\ 0}} + \underbrace{o(x-x_0)}_{\substack{\downarrow x \rightarrow x_0 \\ 0}} = o(x-x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) \rightarrow f(x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \quad \square$$

OSS Non vale il viceversa nel teorema.

" f continua in $x_0 \stackrel{?}{\Rightarrow} f$ derivabile in x_0 " NO

Esistono funzioni continue in un punto che non sono derivabili in tale punto.

Es. 1 $f(x) = x^{1/3}$ continua in $\mathbb{R}$ (anche in $x=0$),
ma (abbiamo visto) non derivabile in $x=0$.

Es. 2 $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ continua in 0 ma non derivabile
in $x=0$.

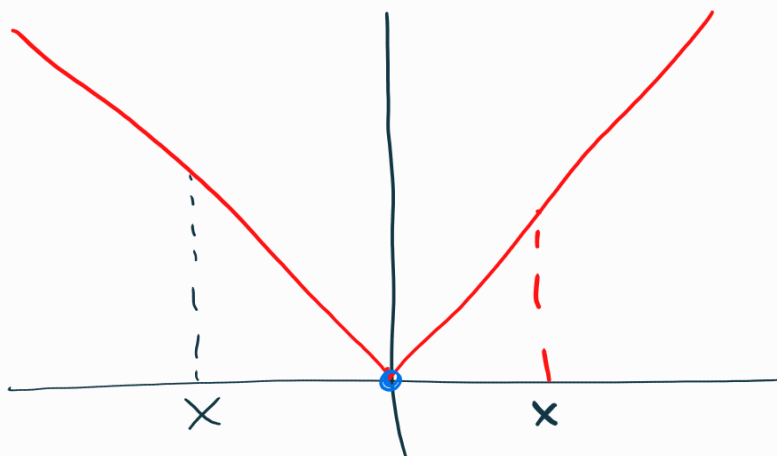
Es. 3 $f(x) = |x|$. continua in $\mathbb{R}$.
ma, come vedremo, non è derivabile in $x=0$.

$$|x|' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h}$$

se $x > 0$ $\Rightarrow |x| = x$, $|x+h| = x+h$ se h è suff^{te} piccolo

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h} = 1.$$



se $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, $|x+h| = -x-h$ se h è "piccolo"

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\cancel{x} - h + \cancel{x}}{h} = -1$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \quad \nexists$$

Infatti $f'_+(0) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$ derivata destra di f in 0.

$f'_-(0) := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$ derivata sinistra di f in 0.

DEF se x_0 è un pto t.c.

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

derivata destra di f in x_0

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

derivata sinistra.
di f in x_0

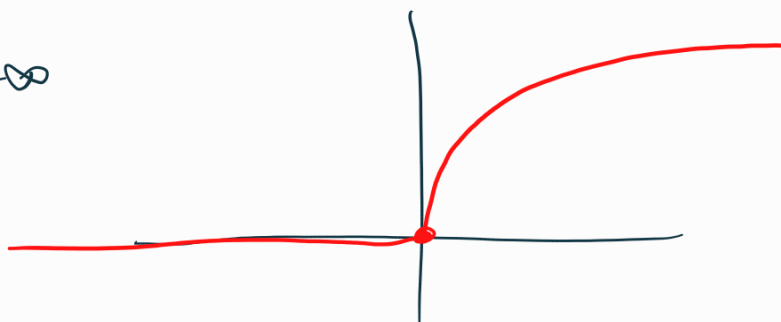
esistono in $\mathbb{R}^*$ e almeno una delle due è finita,

e sono diverse tra loro, il punto $(x_0, f(x_0))$ si dice **pto angoloso** del grafico di f .

Per es.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'_-(0) = 0, \quad f'_+(0) = +\infty$$



$$(|x|)' = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ \cancel{0} & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$(|x|)' = \begin{cases} \frac{x}{|x|} = \text{sign } x & \text{se } x \neq 0. \\ \cancel{0} \text{ (pto angoloso)} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

$$D(x^{4/3}) = \frac{4}{3} x^{1/3}$$

$$D(x^2) = 2x$$

$$D(x^3) = 3x^2$$

$$D(\sin x) = \cos x$$

$$D(\cos x) = -\sin x$$

$$D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

osserviamo che, in questi esempi,
la derivata di una f. pari è dispari,
la derivata di una f. dispari è pari.
Questo si può generalizzare.

TEOREMA

- 1) Se f è derivabile e dispari $\Rightarrow f'$ è pari.
- 2) Se f è derivabile e pari $\Rightarrow f'$ è dispari.

Dim 1) f dispari significa $f(-x) = -f(x) \forall x \in \text{dom } f$.

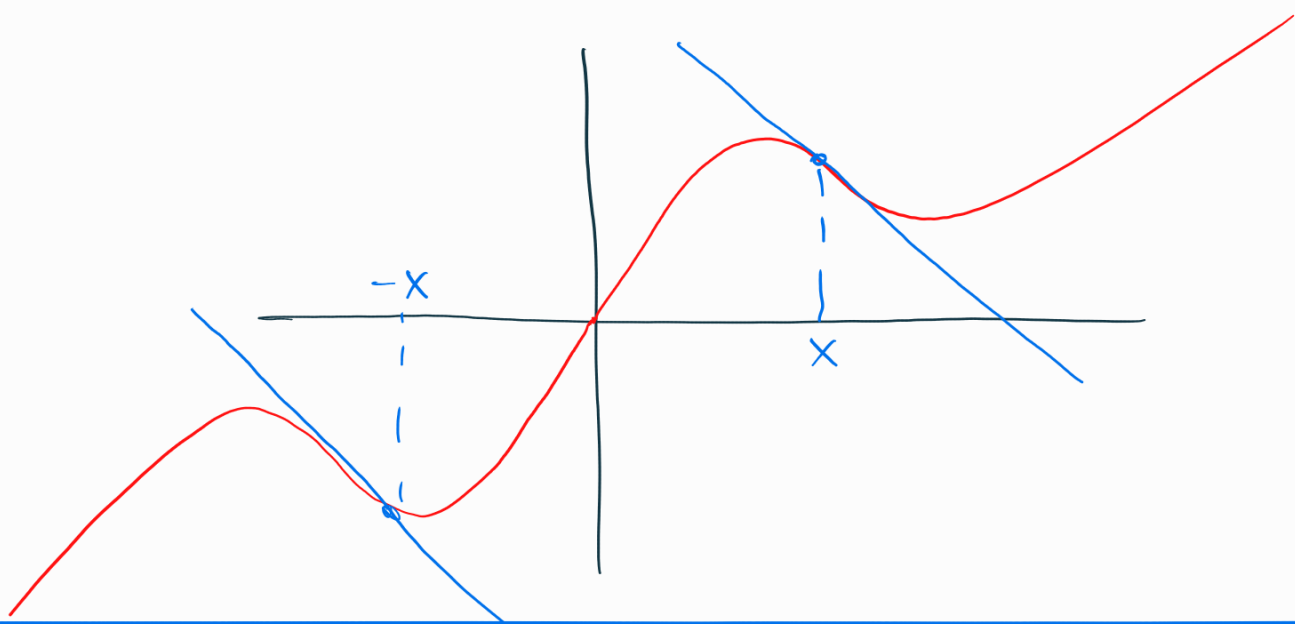
$$f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \text{[f dispari]}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} =$$

pongo $-h = k \rightarrow 0$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x+k) - f(x)}{k} = f'(x) \quad \forall x \in \text{dom } f.$$

$$f'(-x) = f'(x) \quad f' \text{ è pari.}$$



Algebra delle derivate.

Siano $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$. Se f e g sono derivabili in x_0 , allora:

1) $f+g$ è derivabile in x_0 , e si ha

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$\underline{\text{Dim}} \quad (f+g)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - (f(x_0) + g(x_0))}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\downarrow f'(x_0)} + \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{\downarrow g'(x_0)} \right) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

In maniera simile si prova che:

1') $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha f + \beta g$ è derivabile in x_0 , e si ha

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0). \quad \text{[Linearità della derivata]}$$

Es. $(5x^6 + 4x^2 - 7\sin x)' = 5 \cdot 6x^5 + 4 \cdot 2x - 7\cos x =$
 $= 30x^5 + 8x - 7\cos x.$

2) Il prodotto fg è derivabile in x_0 , e si ha.

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Esempio $(x^3 \cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$

Dim 2)

$$(fg)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\underbrace{g(x_0+h)}_{\downarrow g(x_0)} \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\downarrow f'(x_0)} + f(x_0) \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{\downarrow g'(x_0)} \right] =$$

perché g è
derivabile,
quindi continua.

$$\downarrow f(x_0)g'(x_0)$$

$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

3) se $g(x_0) \neq 0$, allora $\frac{1}{g(x)}$ è derivabile in x_0 , e

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

OSS se $g(x_0) \neq 0$,
allora $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0
 $\Rightarrow \frac{1}{g(x)}$ è def^{ta} in un intorno di x_0

Esempio $\left(\frac{1}{x^3-3x}\right)' = -\frac{3x^2-3}{(x^3-3x)^2}$

Dim $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{h g(x_0) g(x_0+h)}}{1} = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \quad \square$$

$\downarrow$ $-g'(x_0)$ $\downarrow$ $g(x_0)$ continua

4) se $g(x_0) \neq 0$, allora $\frac{f(x)}{g(x)}$ è derivabile in x_0 , e si ha:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Esempio $\left(\frac{5x-2}{x^2-1}\right)' = \frac{5(x^2-1) - (5x-2)2x}{(x^2-1)^2} =$

$\forall x \neq \pm 1$ $= \frac{5x^2-5-10x^2+4x}{(x^2-1)^2} = \frac{-5x^2+4x-5}{(x^2-1)^2}$

$$D(\operatorname{tg} x) = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \operatorname{tg}^2 x \end{cases} \quad \text{a scelta.}$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \dots = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad \forall x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x) \quad \forall x \neq k\pi$$