Analisi Vettoriale aa 2025/26 (lt 30046) - E Montefusco - 20251029

Nome: Cognome:

Istruzioni:
È necessario argomentare lo svolgimento dell'esercizio aperto e le risposte dei quiz. La valutazione è legata alla solidità dei ragionamenti svolti e alla chiarezza dell'esposizione, come anche alla correttezza dei passaggi matematici e del risultato finale.

ex.1	
quiz	
tot.	

esercizio 1 (2+3+3+3 punti). *Dati* $q, m \in \mathbb{R}^3$ *con* $q, m \neq 0$ *si consideri la funzione* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definita come segue* $f(x) = q_1x_1^2 + q_2x_2^2 + q_3x_3^2 + m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3$. *Allora*
i. si dica perché f *è differenziabile in tutto lo spazio,*
ii. si calcoli $\nabla f(x)$ *e* $Hf(x)$,
iii. si scriva l'equazione dell'iperpiano tangente al grafico di f *nel punto* $(p, f(p)) = (p_1, p_2, p_3, f(p))$,
iv. si proponga la parametrizzazione di una curva regolare $\phi : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tale che*

$$\phi(0) = 0 = (0, 0, 0) \qquad e \qquad \left[\frac{d}{dt} f(\phi(t))\right]_{t=0} = 0$$

Le differenti versioni di questo esercizio sono relative alle seguenti scelte:
1. $q = (q_1, q_2, q_3) = (1, -2, -1)$, $m = (m_1, m_2, m_3) = (1, -1, 1)$ e $p = (p_1, p_2, p_3) = (1, 0, 1)$
2. $q = (q_1, q_2, q_3) = (-2, 1, 1)$, $m = (m_1, m_2, m_3) = (-1, 1, -1)$ e $p = (p_1, p_2, p_3) = (0, 1, 1)$
3. $q = (q_1, q_2, q_3) = (2, -2, -2)$, $m = (m_1, m_2, m_3) = (1, 1, 1)$ e $p = (p_1, p_2, p_3) = (1, 1, 0)$
4. $q = (q_1, q_2, q_3) = (2, 1, -2)$, $m = (m_1, m_2, m_3) = (-1, -1, 1)$ e $p = (p_1, p_2, p_3) = (1, 0, 1)$.

Svolgimento. i. la funzione f è un polinomio definito su tutto $\mathbb{R}^3$. A lezione abbiamo provato che i polinomi sono funzioni continue su tutto il loro dominio di definzione, quindi possimo scrivere che $f \in C^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, inoltre vale che

$$\partial_i f(x) = \partial_i \left[q_1x_1^2 + q_2x_2^2 + q_3x_3^2 + m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3\right] = 2q_ix_i + m_i \qquad \text{per } i = 1, 2, 3$$

quindi anche le sue derivate parziali sono definite in tutto lo spazio ed, essendo polinomi, sono funzioni continue, per cui abbiamo mostrato che $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, il teorema del differenziale totale ci permette di concludere che f è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R}^3$.
ii. Sfruttando il calcolo performato nella discussione precedente abbiamo subito che

$$\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \partial_2 f(x), \partial_3 f(x)) = (2q_1x_1 + m_1, 2q_2x_2 + m_2, 2q_3x_3 + m_3) \qquad \text{per } x \in \mathbb{R}^3$$

Notiamo che $\partial_i f(x) = \partial_i f(x_i)$, cioè la derivata parziale i-sima dipende solo dalla i-sima componente di x, quindi tornando a derivare otteniamo

$$\partial_{ii} f(x) = 2q_i \quad \text{per } i = 1, 2, 3 \qquad e \qquad \partial_{ij} f(x) = 0 \quad \text{per } i, j = 1, 2, 3 \text{ e } i \neq j$$

che ci permette di concludere che

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 2q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2q_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^3$$

Si noti che la matrice hessiana è simmetrica, come provato dal teorema di Schwarz, infatti $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ quindi le ipotesi dell'enunciato sono verificate.
iii. Il punto $(p, f(p))$ appartiene al grafico della funzione per ogni $p \in \mathbb{R}^3$, cioeè per ogni input ammissibile per la funzione, l'equazione dell'iperpiano tangente è

$$\begin{aligned}
x_4 &= f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p) = f(p) + (\partial_1 f(p), \partial_2 f(p), \partial_3 f(p)) \cdot (x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3) \\
&= [f(p) - \nabla f(p) \cdot p] + \partial_1 f(p)x_1 + \partial_2 f(p)x_2 + \partial_3 f(p)x_3 \\
&= \left[q_1p_1^2 + q_2p_2^2 + q_3p_3^2 + m_1p_1 + m_2p_2 + m_3p_3 - (2q_1p_1 + m_1)p_1 - (2q_2p_2 + m_2)p_2 - (2q_3p_3 + m_3)p_3\right] \\
&\qquad + (2q_1p_1 + m_1)x_1 + (2q_2p_2 + m_2)x_2 - (2q_3p_3 + m_3)x_3 \\
&= (2q_1p_1 + m_1)x_1 + (2q_2p_2 + m_2)x_2 - (2q_3p_3 + m_3)x_3 - \left[q_1p_1^2 + q_2p_2^2 + q_3p_3^2\right]
\end{aligned}$$

È una mera questione di calcoli verificare che il punto $(p, f(p) \in \mathbb{R}^4$ appartiene sia al grafico della funzione che all'iperpiano tangente.

iv. Il testo chiede di scrivere la parametrizzazione di una curva regolare passante per O (per t = 0) e tale che la sua composizione con f produca una funzione avente un punto stazionario per t = 0. Poiché, per il teorema di differenziabilità delle funzioni composte, sappiamo che

$$\left[\frac{d}{dt} f(\phi(t))\right]_{t=0} = \Big[Jf(\phi(t))J\phi(t)\Big]_{t=0} = \Big[\nabla f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\Big]_{t=0} = \nabla f(O) \cdot \phi'(0)$$

è possibile dedurre che la richiesta del testo significa che la curva, per t = 0, deve avere velocità ortogonale al gradiente della funzione f in x = O o, se si preferisce, la curva deve passare per il punto O parallelamente all'insieme di livello $\{x : f(x) = f(O) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Consideriamo la curva (mutuata dal moto rettilineo uniforme) di parametrizzazione

$$\phi : [-1, +1] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \phi(t) = wt \quad \text{con } w \in \mathbb{S}^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\|_2 = 1\}$$

È immediato verificare che $\phi(0) = O$ e che $\phi'(t) = w \neq 0$ per ogni $t \in [-1, +1]$, cioè che la curva è regolare. Per concludere l'esercizio è sufficiente scegliere il versore w in modo che valga

$$\nabla f(O) \cdot w = (m_1, m_2, m_3) \cdot (w_1, w_2, w_3) = 0$$

cioè la direzione w del moto deve essere ortogonale al vettore dei coefficienti dei termini di primo grado $m = (m_1, m_2, m_3)$. Si noti che, essendo lo spazio ambiente $\mathbb{R}^3$, l'insieme del vettori ortogonali ad m ha almeno dimensione 2 (esattamente 2 se e solo se $\nabla f(O) = m \neq O$), la dimensione del piano tangente. □

QUIZ 1. *L'insieme* $\{x_1 = 0, x_2 \leq 1\} \subseteq (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ *è chiuso* $\boxed{V}$

L'insieme può essere descritto nel seguente modo $\{x_1 = 0, x_2 \leq 1\} = \{x_1 \leq 0\} \cap \{x_1 \geq 0\} \cap \{x_2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ come intersezione di tre semispazi chiusi (come provato a lezione). Poiché l'intersezione di insiemi chiusi dà sempre luogo ad insiemi chiusi l'affermazione è vera.

QUIZ 2. *L'insieme* $\{2 \leq x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \leq 4\}$ *è compatto in* $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ $\boxed{V}$

L'insieme in oggetto è limitato in quanto vale che $\{2 \leq x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \leq 4\} \subseteq \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4\} \subseteq B(O, 3)$, inoltre l'insieme è chiuso perché intersezioni di due insiemi chiusi, visto che $\{2 \leq x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \leq 4\} = \{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \geq 2\} \cap \{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \leq 4\}$. Essendo chiuso e limitato l'insieme è compatto (per il teorema di Bolzano & Weierstrass).

QUIZ 3. *Sia* A *un aperto di* $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ *e* $p \in A$*, allora esiste* $\{x_k\} \subseteq A^C$ *tale che* $x_k \longrightarrow p$ $\boxed{F}$

È sufficiente considerare $A = B(O, 1)$ e $p = O$, abbiamo che $A^C = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 \geq 1\}$ e ogni successione $\{x_k\}$ convergente a O è tale che esiste K_O per il quale $\|x_k - O\|_2 \leq 1/2$ se $k \geq K_O$ (per la definizione di limite), cioè $x_k \in A$ definitivamente...

QUIZ 4. *Sia* p *un punto di* $\mathbb{R}^3$*, allora la funzione* $f(x) := \|x - p\|_2$*, con* $x \in \mathbb{R}^3$*, è continua* $\boxed{V}$

È possibile provare la continuità della funzione in vari modi, mostriamone alcuni.

Ricordiamo che una funzione è continua se per ogni $x_k \longrightarrow \bar{x}$, vale che $f(x_k) \longrightarrow f(\bar{x})$. Nel nostro caso sappiamo che

$$x_k \longrightarrow \bar{x} \qquad \text{da cui} \qquad x_{k,i} \longrightarrow \bar{x}_i \quad \text{per ogni } i = 1, 2, 3$$

e quindi possiamo dire che

$$f(x_k) = \left[\sum_{i=1}^{3} (x_{k,i} - p_i)^2\right]^{1/2} \longrightarrow \left[\sum_{i=1}^{3} (\bar{x}_i - p_i)^2\right]^{1/2} = f(\bar{x})$$

perché le potenze, la somma e la radice quadrata sono funzioni continue da $\mathbb{R}$ (o sottoinsiemi) in $\mathbb{R}$.

In alternativa possiamo provare che la funzione è 1-lipschitziana, infatti, per la disuguaglianza triangolare, vale che

$$\big|f(x) - f(y)\big| = \big|\|x - p\|_2 - \|y - p\|_2\big| \leq \|x - y\|_2$$

e la lipschitzianità implica la continuità.

QUIZ 5. *Sia* $f \in C^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$*, allora la matrice* $Hf(x_0)$ *è rettangolare* $\boxed{F}$

Per definizione vale che $Hf(x_0) = \left[\partial_{ij} f(x_0)\right]$ con $i,j = 1,2,3$, per esteso (se si preferisce) è

$$Hf(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_{11}f(x_0) & \partial_{12}f(x_0) & \partial_{13}f(x_0) \\ \partial_{21}f(x_0) & \partial_{22}f(x_0) & \partial_{23}f(x_0) \\ \partial_{31}f(x_0) & \partial_{32}f(x_0) & \partial_{33}f(x_0) \end{pmatrix}$$

quindi la matrice hessiana è (sempre) quadrata e mai rettangolare.

QUIZ 6. *L'insieme* $\{x_2 = 0, x_3 = 0\} \subseteq (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ *è chiuso* $\boxed{V}$

L'insieme che ci interessa può essere riscritto nel seguente modo

$$\{x_2 = 0, x_3 = 0\} = \{x_2 \geq 0\} \cap \{x_2 \leq 0\} \cap \{x_3 \geq 0\} \cap \{x_3 \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

quindi è intersezione di chiusi, quindi un chiuso.
Si noti che le due equazioni identificano l'asse x_1 dello spazio e tale insieme è chiuso perché contiene i punti limiti di ogni sua successione convergente, infatti se $\{x_k\} \subseteq \{x_2 = x_3 = 0\}$ è una successione convergente a $\bar{x}$, allora vale che

$$x_{k,1} \longrightarrow \bar{x}_1 \qquad 0 = x_{k,2} \longrightarrow \bar{x}_2 \qquad 0 = x_{k,3} \longrightarrow \bar{x}_3$$

da cui deduciamo che $\bar{x} = (\bar{x}_1, 0, 0) \in \{x_2 = x_3 = 0\}$.

QUIZ 7. *L'insieme* $\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 1\}$ *è compatto in* $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ $\boxed{F}$

Per provare che l'affermazione è falsa è sufficiente considerare la successione $\{y_k = (2^k, 0, 0)\} \subseteq \{x_1^2+x_2^2+x_3^2 \geq 1\}$, che non possiede sottosuccessioni convergenti.
È anche possibile osservare che l'insieme non è limitato, essendo il complementare di un insieme limitato, precisamente $\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 1\} = B(0,1)^C$, mentre i compatti di $\mathbb{R}^3$ sono sempre insiemi chiusi e limitati.

QUIZ 8. *Siano* A *un aperto di* $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ *e* $p \in A$*, allora* $A \setminus \{p\}$ *è aperto* $\boxed{V}$

È ossibile mostrare che $A \setminus \{p\}$ è aperto verificando che l'insieme soddisfa la definizione di aperto, però è più rapido osservare che $\{p\}$ è un chiuso di $\mathbb{R}^3$, quindi il suo complementare è aperto e vale $\{p\}^C = \mathbb{R}^3 \setminus \{p\}$, allora $(A \setminus \{p\}) = A \cap \{p\}^C$ è aperto perché intersezione di un numero finito (due!) di aperti.

QUIZ 9. *Sia* $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$, $x \in \mathbb{R}^3$*, allora il piano tangente in* $(x_0, f(x_0))$ *ha equazione* $x_4 = x_0 \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ $\boxed{V}$

Sappiamo che, in generale, l'equazione del piano tangente è $x_4 = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$, poiché vale

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right] \qquad \text{da cui} \qquad \partial_i f(x) = x_i \qquad \text{cioè} \qquad \nabla f(x_0) = (x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}) = x_0$$

l'affermazione è provata.

QUIZ 10. *Sia* $f \in C^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$*, allora la matrice* $Jf(x_0)$ *è simmetrica* $\boxed{F}$

La matrice jabobiana, nel caso in esame, è una matrice quadrata perché la dimensione dello spazio degli input è la stessa dello spazio degli output (cioè f è un campo vettoriale), però tale matrice non ha alcun motivo per essere simmetrica, come indica il seguente esempio

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} \qquad Jf(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Jf(x)^T$$

QUIZ 11. *L'insieme* $\{x_2 = 0, x_3 = 0\} \subseteq (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ *è aperto* $\boxed{F}$

Osserviamo che il punto $O \in \{x_2 = x_3 = 0\}$ non è un punto interno, infatti per ogni $r > 0$ vale che $(0,0,r/2) \in B(0,r)$ e $(0,0,r/2) \notin \{x_2 = x_3 = 0\}$, quindi l'insieme non è aperto perché possiede almeno un punto non interno.

QUIZ 12. *L'insieme* $\{x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 0\}$ *è compatto in* $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ **V**

L'insieme è compatto in quanto chiuso e limitato. Infatti è chiuso perché intersezione di insiemi chiusi, visto che vale $\{x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 0\} = \{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \cap \{x_3 \geq 0\} \cap \{x_3 \leq 0\}$, ed è limitato visto che $\{x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 0\} \subseteq [-1,1]^3$.

QUIZ 13. *Siano* C *un chiuso di* $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ *e* $p \in C$*, allora* $C \setminus \{p\}$ *è aperto* **F**

Prendiamo in esame $C = \{p, q\} \subseteq \mathbb{R}^3$, con $p \neq q$, allora $(C \setminus \{p\}) = \{q\}$ insieme chiuso non aperto.

QUIZ 14. *Per* $x \in \mathbb{R}^3$ *sia* $f(x) = w \cdot x + q$*, con* $w \in \mathbb{R}^3$ *e* $q \in \mathbb{R}$*, allora* $\nabla f(x) = w$ *e* $\Delta f(x) = 0$ **V**

Notiamo che $f(x) = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + q$, quindi vale $\partial_i f(x) = w_i$ e conseguentemente $\nabla f(x) = w$.
Essendo il gradiente indipendente dalle componenti dell'input x segue che le derivate seconde sono tutte nulle, e quindi anche il laplaciano di f.

QUIZ 15. *Sia* $f \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^2)$*, allora la matrice* $Jf(x_0)$ *è rettangolare* **V**

Ricordando la definizione di matrice jacobiana abbiamo che poiché

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \qquad \text{vale} \qquad Jf(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) & \partial_3 f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \partial_2 f_2(x) & \partial_3 f_2(x) \end{pmatrix}$$

quindi la matrice Jf è solo rettangolare (cioè non quadrata), visto che le dimensioni degli spazi vettoriali ambiente in input ed output non coincidono.

QUIZ 16. *L'insieme* $\{x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 0\}$ *in* $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ *è chiuso* **V**

Osserviamo subito che $\{x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 0\} = \{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \cap \{x_3 = 0\}$, cioè il nostro insieme è intersezione di due insiemi chiusi, quindi è un chiuso lui stesso.

QUIZ 17. *L'insieme* $\{0 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 2\}$ *è compatto in* $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ **F**

Per mostrare che l'insieme $C = \{0 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 2\}$ non è compatto esibiamo una successione contenuta in C che non ha sottosuccessioni che convergono ad un punto di C. Per esempio possiamo considerare $C \ni x_k = (0,0,2^{-k}) \longrightarrow 0$: essendo una successione convergente a 0 tutte le sue sottosuccessioni convergono a 0, è interamente contenuta in C, ma il suo punto limite si trova nel complementare...

QUIZ 18. *In* $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ *esistono aperti non vuoti contenenti un numero finito di punti* **F**

Sia $A \subseteq (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ un aperto non vuoto, allora esiste almeno un punto $p \in A$ e, per definizione di aperto, $r_0 > 0$ tale che $B(p, r_0) \subseteq A$, però $B(p, r_0)$ contiene infiniti punti...

QUIZ 19. *Sia* $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$*,* $x \in \mathbb{R}^3$*, allora* $\nabla f(x) = x$ *e* $\Delta f(x) = 3$ **V**

Poiché $f(x) = \frac{1}{2}\left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right]$, allora abbiamo che $\partial_i f(x) = x_i$, quindi $\nabla f(x) = x$, e poi $\partial_{ii} f(x) = 1$, da cui segue che $\Delta f(x) = \partial_{11} f(x) + \partial_{22} f(x) + \partial_{33} f(x) = 3$.

QUIZ 20. *Sia* $f \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$*, allora la matrice* $Hf(x_0)$ *è quadrata e simmetrica* **V**

Ricordiamo che

$$Hf(x_0) = \left[\partial_{ij} f(x)\right]_{i,j=1,2,3}\bigg|_{x=x_0} = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(x_0) & \partial_{12} f(x_0) & \partial_{13} f(x_0) \\ \partial_{21} f(x_0) & \partial_{22} f(x_0) & \partial_{23} f(x_0) \\ \partial_{31} f(x_0) & \partial_{32} f(x_0) & \partial_{33} f(x_0) \end{pmatrix}$$

quindi la matrice hessiana è sempre quadrata, visto che entrambe le sue dimensioni dipendono dalla dimensione dello spazio degli input, la simmetria discende dal teorema di Schwarz, che è garantito dalla regolarità della funzione.
