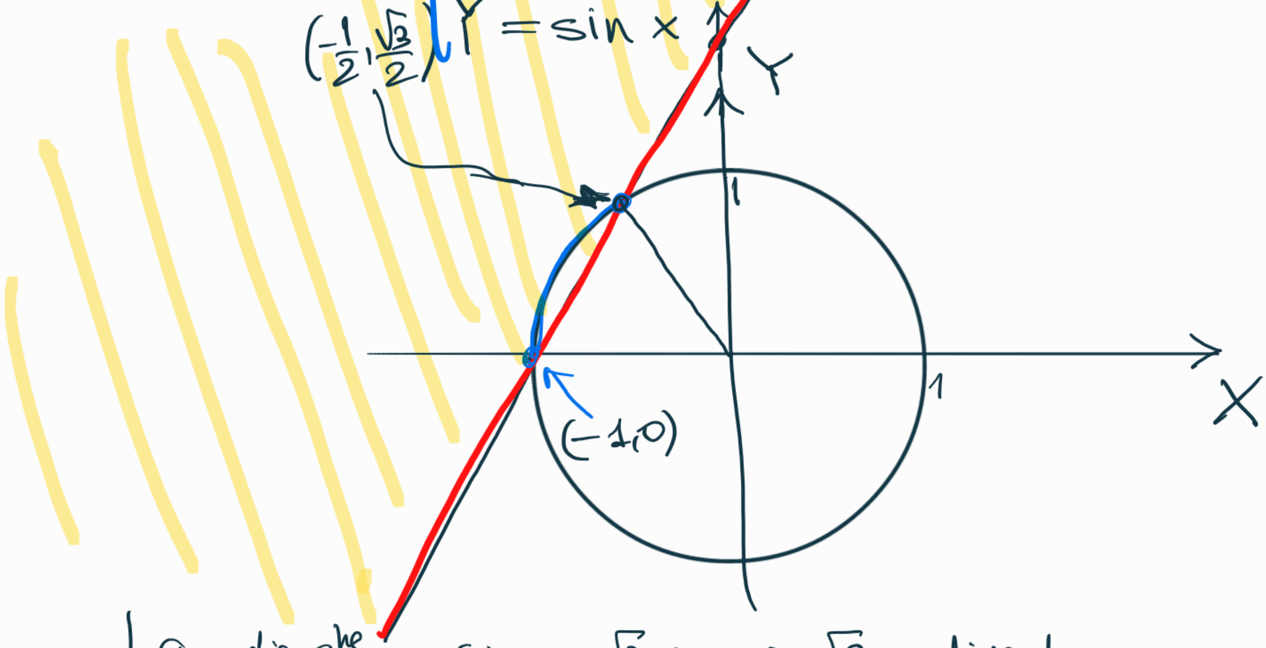
Diseq^{ni} trigonometriche

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x \geq \sqrt{3}$$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ ricordarsi che $(\cos x, \sin x)$ sono le coord. di un pto sulla circ. unitaria.

Poniamo $\begin{cases} X = \cos x \\ Y = \sin x \end{cases}$ con $X^2 + Y^2 = 1$



La diseq^{ne} $\sin x - \sqrt{3}\cos x \geq \sqrt{3}$ diventa

$$Y - \sqrt{3}X \geq \sqrt{3}$$

$$\boxed{Y \geq \sqrt{3}(X+1)}$$

è un semipiano che sta sopra la retta $Y = \sqrt{3}(X+1)$

La diseq^{ne} è equivalente al seguente sistema

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ Y \geq \sqrt{3}(X+1) \end{cases}$$

Sto cercando i pti (X, Y) della circonferenza che stanno al di sopra della retta $Y = \sqrt{3}(X+1)$

Cerco le intersezioni retta-circonferenza

$$\begin{cases} X^2+Y^2=1 \\ Y=\sqrt{3}(X+1) \end{cases} \Longrightarrow X^2+\left(\sqrt{3}(X+1)\right)^2=1$$

$$X^2+3(X^2+2X+1)=1$$

$$4X^2+6X+2=0$$

$$2X^2+3X+1=0$$

$$X_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4}=$$

$$=\frac{-3\pm1}{4}= \begin{cases} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$X=-1 \Rightarrow Y=\sqrt{3}(X+1)=\sqrt{3}\cdot 0=0$$

$$X=-\frac{1}{2} \Rightarrow Y=\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Intersezioni $(-1,0)$ e $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{cases} \cos x=-1 \\ \operatorname{sen} x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x=-1/2 \\ \operatorname{sen} x=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x=\pi\ (+2k\pi) \qquad x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi.$$

Sol^{ni} della diseq.:

$$\boxed{\frac{2}{3}\pi+2k\pi\leq x\leq \pi+2k\pi}$$

2° modo. $\sin x - \sqrt{3}\cos x \geq \sqrt{3}$

Consiste nell'osservare che una combinazione lineare di $\cos x$ e $\sin x$ è sempre una sinusoide, con un'ampiezza e una fase.

$$f(x) = A\sin x + B\cos x, \quad A, B \in \mathbb{R} \text{ non entrambe nulle}$$

Formula per il seno di una somma.

$$\sin(x+\varphi) = \underbrace{\cos\varphi}_{A} \sin x + \underbrace{\sin\varphi}_{B} \cos x$$

Vorrei trovare φ t.c. $\begin{cases} \cos\varphi = A \\ \sin\varphi = B \end{cases}$

Lo posso fare solo se $A^2+B^2=1$.

$$f(x) = A\sin x + B\cos x = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x\right)$$

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = \frac{A^2+B^2}{A^2+B^2} = 1$$

Posso trovare φ t.c. $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{cases}$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos\varphi \sin x + \sin\varphi \cos x) =$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\,\sin(x+\varphi)$$

dove $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{cases}$

Torniamo alla nostra diseq^{ne}

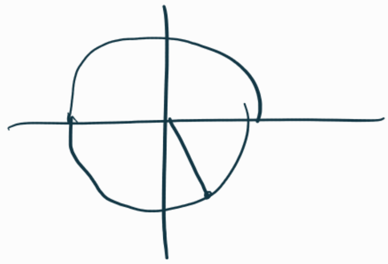
$A = 1, \ B = -\sqrt{3}$

$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = (*)$$

cerco φ t.c. $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$



$$\varphi = -\frac{\pi}{3}$$

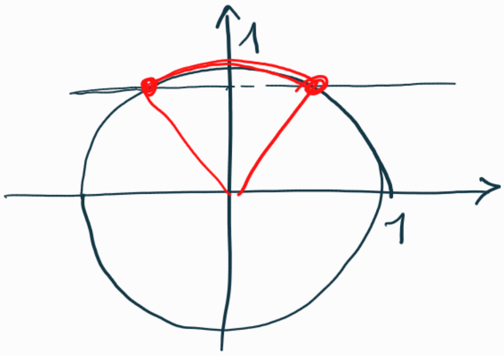
$$(*) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

La diseq^{ne} diventa $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \sqrt{3}$

$$\sin \underbrace{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}_{t} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$t = x - \frac{\pi}{3}$

$$\sin t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \underset{\substack{\parallel \\ x - \frac{\pi}{3}}}{t} \leq \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

somma $\frac{\pi}{3}$

$$\boxed{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi}$$

$k \in \mathbb{Z}$

<u>3° modo</u> (metodo parametrico)

Trasformiamo tutto in funzione di $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

Valgono le seguenti formule:

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \qquad \forall x \text{ t.c. } \exists \operatorname{tg}\frac{x}{2} \qquad \forall x \text{ t.c. } \frac{x}{2} \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}}$$

$$\forall x \neq (2k+1)\pi$$

Nel nostro caso la diseq^ne

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x \geq \sqrt{3}$$ diventa

$$\frac{2t}{1+t^2} - \sqrt{3}\,\frac{1-t^2}{1+t^2} \geq \sqrt{3} \qquad \boxed{\begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ x \neq (2k+1)\pi \end{array}}$$

molt. per $1+t^2 > 0$.

$$2t - \sqrt{3}(1-t^2) \geq \sqrt{3}(1+t^2)$$

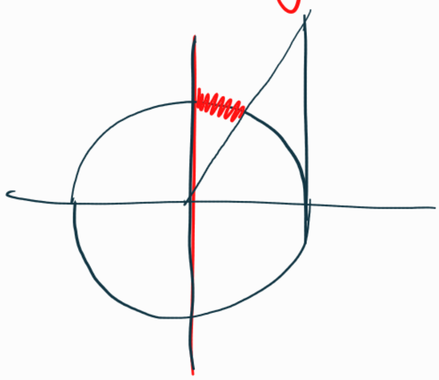
$$2t - \sqrt{3} + \cancel{\sqrt{3}t^2} \geq \sqrt{3} + \cancel{\sqrt{3}t^2}$$

$$2t \geq 2\sqrt{3}$$

$$t \geq \sqrt{3}$$

$$\overset{\shortparallel}{\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}}, \qquad \frac{x}{2} = s$$

$$\operatorname{tg} s \geq \sqrt{3}$$



$$\Updownarrow$$

$$\frac{\pi}{3} + k\pi \leq s < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$s = \frac{x}{2}$$

$$\frac{\pi}{3} + k\pi \leq \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$$

diverso da prima, perché?

devo verificare a parte il caso $x = \pi + 2k\pi$

$$\sin\pi - \sqrt{3}\underbrace{\cos\pi}_{=-1} \overset{?}{\geq} \sqrt{3}$$

$$0 + \sqrt{3} \geq \sqrt{3} \quad \text{OK.}$$

$x = \pi + 2k\pi$ va riaggiunto alle sol.ni