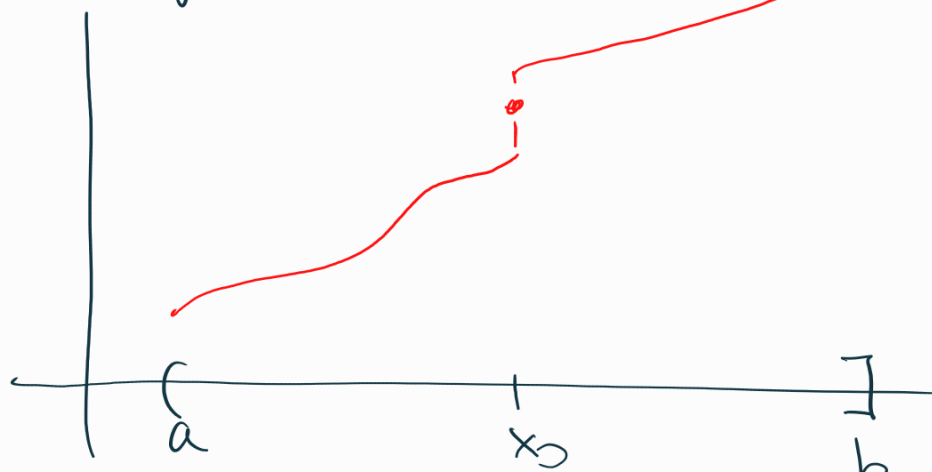


Teorema: Sia f una funzione **monotona** in I .
 Allora f può ammettere solo discontinuità di salto.
 (oppure discontinuità eliminabili agli estremi)

Dim Supponiamo f crescente, sia x_0 interno a I
 (non è uno degli estremi dell'intervallo).



f crescente e $x < x_0 \Rightarrow \underline{f(x) \leq f(x_0)}$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

$\cap \mathbb{R}$ perm. segno $\cap \mathbb{R}$

Invece in uno degli estremi, per es. b ,

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \leq f(b) \quad \text{se } f(b) > f(x)$$

si ha una discont. eliminabile.

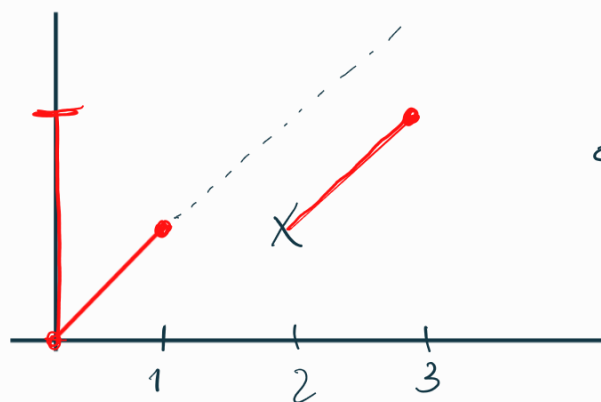
□

Oss Se f è una funzione continua e iniettiva,
 si può rendere biiettiva restringendo opportunamente il codominio.
 Quindi f è biiettiva, ed esiste f^{-1} (inversa)
 f^{-1} è continua?

In generale no.

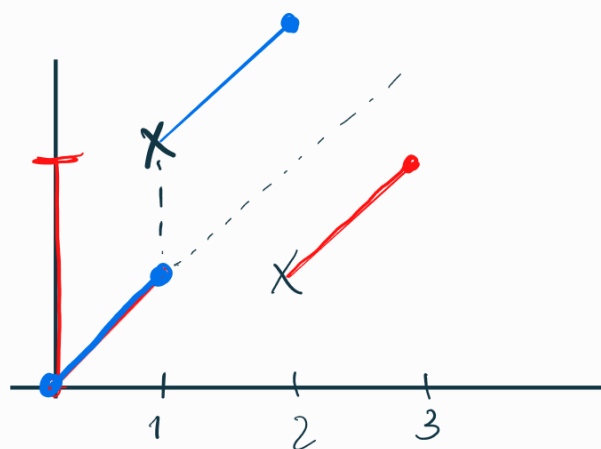
$$f: [0,1] \cup (2,3] \rightarrow \cancel{\mathbb{R}} [0,2] \quad \text{bieltina.}$$

$$\begin{matrix} \psi \\ x \end{matrix} \mapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ x-1 & \text{se } x \in (2,3] \end{cases}$$



f è strett. crescente $\rightarrow$ iniettiva
 f è continua.

$$\text{Im } f = [0,2]$$



$$y = f^{-1}(x)$$

$$f^{-1}: [0,2] \rightarrow [0,1] \cup (2,3]$$

$$\begin{matrix} \psi \\ y \end{matrix} \mapsto \text{l'unico } \begin{matrix} \psi \\ x \end{matrix} \text{ t.c. } f(x)=y.$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ 1+x & \text{se } x \in (1,2] \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{discontinua} \\ \text{in } x=1 \end{matrix}$$

Tuttavia sussiste il seguente risultato.

TEOREMA Sia f continua e iniettiva in un intervallo I
 (quindi strettamente monotona). Allora la sua inversa f^{-1}
 (definita in un intervallo) è continua.

Applicazione: le funzioni

arcsin x (l'inversa di $\sin x$ | $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) ↖ continua e strett. crescente
in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

arccos x (l'inversa di $\cos x$ | $[0, \pi]$) ↖ continua e strett. decres.

arctg x (l'inversa di $\operatorname{tg} x$ | $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) ↖ continua e strett. crescente

sono continue nel loro dominio.

Idea della dim.

Supponiamo $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua e strett. crescente
 $\operatorname{im} f = J$ intervallo.

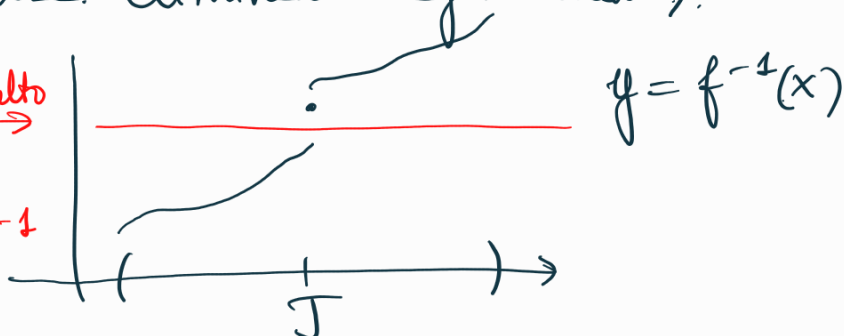
$f: I \rightarrow J$ biettiva
 $f^{-1}: J \rightarrow I$ oss f^{-1} è biettiva
 $(f^{-1})^{-1} = f$

oss f^{-1} è strett. crescente.

f^{-1} è strett. crescente in J intervallo.

⇒ Le uniche discontinuità possibili sono di salto
(oppure disc. eliminabili agli estremi).

se ci fosse un salto
questo valore
non è mai
assunto da f^{-1}



Supp. per assurdo che f^{-1} abbia una disce. di salto.
Allora $\text{im } f^{-1}$ non può essere un intervallo // assurdo!
ma $\text{im } f^{-1} = I$ intervallo. $\square$

DERIVATE

Concetto "cinematico" di derivata. (Fisica)

Sia $x(t)$ la posizione all'istante t di un punto materiale che si muove lungo una guida rettilinea

$$t_0 < t_1 < t_2 \quad \begin{array}{ccc} | & | & | \\ x(t_0) & x(t_2) & x(t_1) \end{array} \rightarrow$$

Fissati $t_0 < t_1$, considero la velocità media del punto materiale nell'intervallo $[t_0, t_1]$

$$\bar{v}(t_0, t_1) = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Esempio: $t_0 = 0 \text{ sec.}$ $t_1 = 60 \text{ sec.}$
 $x(t_0) = 0 \text{ m}$ $x(t_1) = 900 \text{ m}$

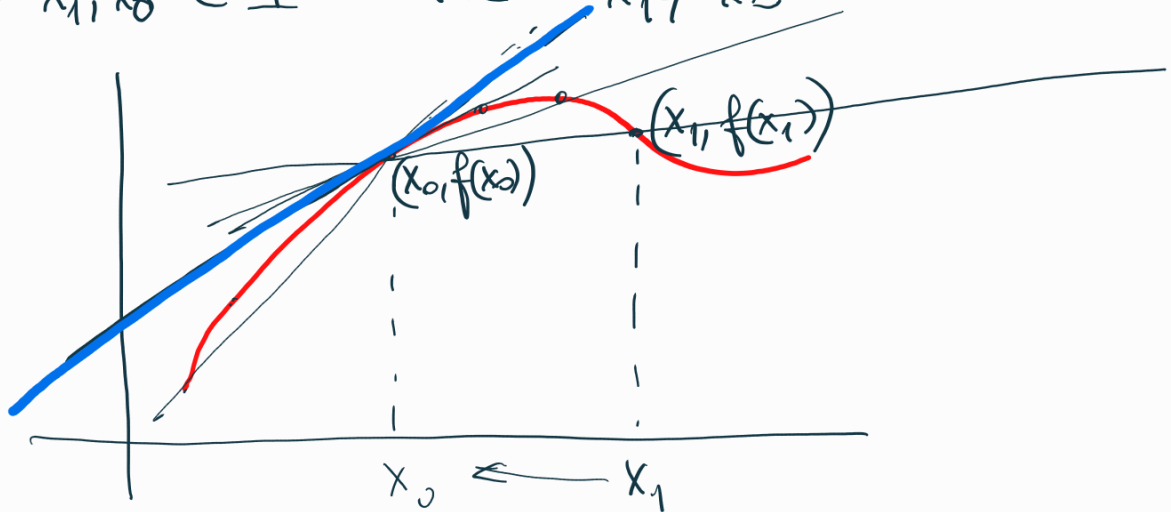
$$\bar{v}(t_0, t_1) = \frac{(900 - 0) \text{ m}}{(60 - 0) \text{ s}} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Se voglio una rappresentazione più precisa della velocità devo prendere intervalli di tempo sempre più brevi

$$v(t_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$$

2). Concetto "geometrico-analitico" di derivata come coeff^{te} angolare della retta tangente al grafico di una funzione.

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo I , siano $x_1, x_0 \in I$ t.c. $x_1 \neq x_0$



Eq^{le} della retta passante per $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Adesso, tenendo fisso x_0 , faccio avvicinare x_1 a x_0 .
La retta "diventa" la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Il suo coeff^{te} angolare diventa

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

DEF Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ pto non isolato di X
 f si dice **derivabile** in x_0 se esiste finito il limite:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$h = x - x_0 \rightarrow 0$$

$$x = x_0 + h$$

In tal caso il numero $f'(x_0)$ si dice **derivata** di f in x_0 .
La quantità $P(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ si dice
rapporto incrementale di f tra i punti x, x_0 .

Sia $f(x) = x^2$, calcoliamo $f'(3)$.

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$h = x - 3 \rightarrow 0$
 $x = 3 + h$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{9} + 6h + h^2 - \cancel{9}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6.$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad f'(-2)$$

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{-2+h} - \frac{1}{-2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{2} + (-\cancel{2} + h)}{\cancel{h} 2 (-2+h)} = -\frac{1}{4}$$

Altre notazioni per la derivata:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = Df(x_0) = \dot{f}(x_0).$$

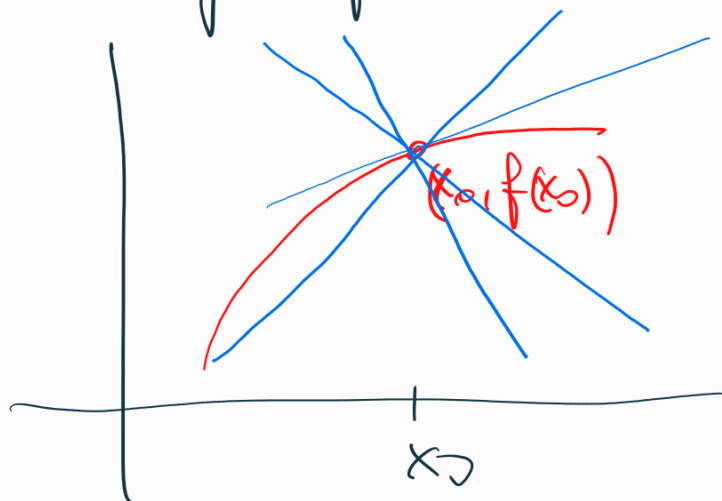
Precisiamo il concetto di retta tangente al grafico di $f(x)$.

Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in I$.

Consideriamo le generiche rette passanti per $(x_0, f(x_0))$,
di equazione

$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$

$m \in \mathbb{R}$
Coeff. angolare



Oss Per $x \rightarrow x_0$ (se f è continua in x_0)

$$\underbrace{f(x)}_{f(x_0)} = \underbrace{f(x_0)}_{f(x_0)} + \underbrace{m(x - x_0)}_{0} + \underbrace{o(1)}_{\text{per } x \rightarrow x_0}$$

Si definisce retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

se esiste, una retta della forma

$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$

verificante

def. di
retta tg.

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ per } x \rightarrow x_0$$



$$f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)] = o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)]}{x - x_0} = 0$$



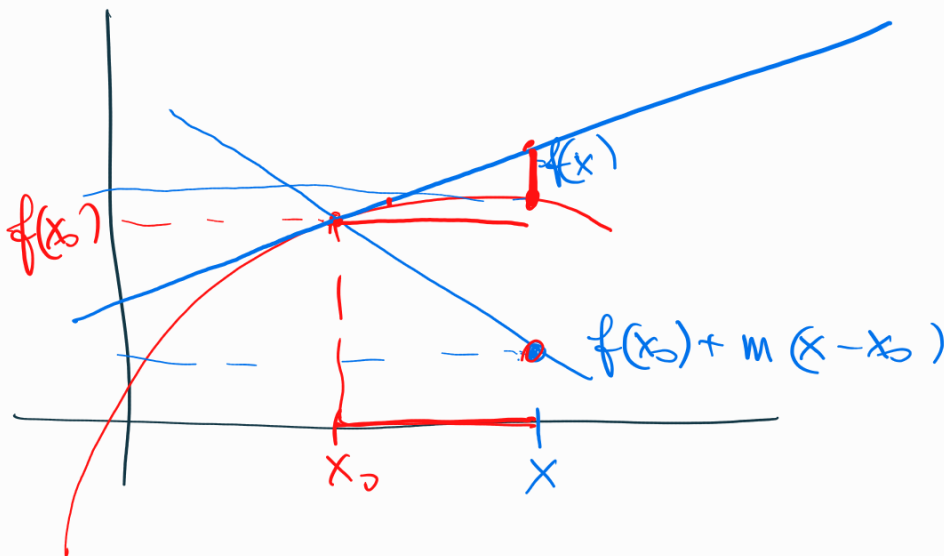
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \right]$$



$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m$$

Abbiamo provato che:

f è derivabile in $x_0 \iff$ esiste la retta tangente al graf f
nel pto $(x_0, f(x_0))$
e in tal caso il coeff^{te} della retta tg. vale $m = f'(x_0)$



Eq^{ne} della retta tangente a graf f in $(x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Trovare la retta tangente al grafico di $f(x) = x^2$
nel pto $(3, 9)$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$x_0 = 3$$

$$f(x_0) = 9$$

$$y = 9 + 6(x - 3)$$

$$f'(x_0) = 6$$

visto prima

$$x^2 = 9 + 6(x - 3) + o(x - 3) \quad \text{per } x \rightarrow 3$$

Quando una funzione f è derivabile $\forall x \in X$, diremo
che f è derivabile in X , e parleremo di funzione derivata

$$\begin{array}{ccc} f' : & X & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Derivate delle funzioni elementari

1) Derivata di una costante.

$$\text{Sia } f(x) \equiv c, \text{ cioè } f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\boxed{Dc \equiv 0}$$

$$c' \equiv 0$$

2) $f(x) = ax + b$ $a, b \in \mathbb{R}$ fissati.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(\cancel{x+h}) + \cancel{b} - (\cancel{ax} + \cancel{b})}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = a.$$

$$D(ax+b) \equiv a$$

$$(ax+b)' = a \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3) $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x. \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(x^2)' = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4) $(x^k)'$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^k - x^k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^k \left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^k - 1 \right]}{h} =$$

$k \in \mathbb{N}.$ $\sim \frac{h}{x}^k$

$(1+t)^k - 1 \sim kt$ per $t \rightarrow 0$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^k \frac{h}{x} k}{h} = kx^{k-1}$$

Per $x=0$ faccio il conto a parte

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h)^k - 0^k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{k-1} = \begin{cases} 1 & \text{se } k=1 \\ 0 & \text{se } k > 1 \end{cases}$$

In ogni caso

$$(x^k)' = k x^{k-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}.$$