

TEOR. di WEIERSTRASS

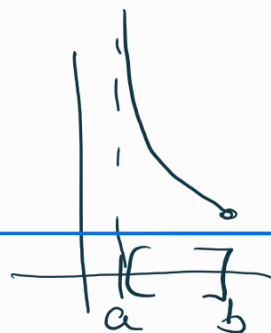
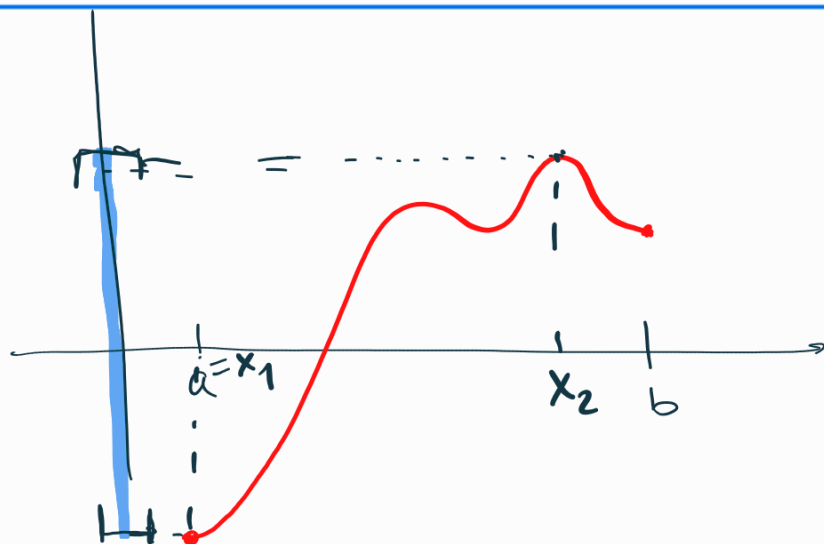
Se f è una funzione continua in $[a, b]$,

↖ chiuso e limitato

essa ammette massimo assoluto e minimo assoluto.

Ossia: $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ t.c.

$$\underbrace{f(x_1)}_{\text{min. assoluto}} \leq f(x) \leq \underbrace{f(x_2)}_{\text{massimo assoluto}} \quad \forall x \in [a, b]$$



Conseguenze del thm. di Weierstrass

1) Una funzione continua in $[a, b]$ è limitata

2) f continua in $[a, b] \Rightarrow \text{im } f = \{ f(x) : x \in [a, b] \}$
è un intervallo chiuso e limitato

Dim Thm. di Weierstrass

Dim. l'esistenza del max. assoluto (quella del minimo è analoga)

1°) costruzione di una succ^{ne} "massimizzante", cioè

una succ^{ne} $\{a_n\} \subset [a, b]$ t.c. $f(a_n) \rightarrow \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

due casi:

$$i) \sup_{x \in [a,b]} f(x) = \sup \{ f(x) : x \in [a,b] \} \in \mathbb{R}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ \exists a_n \in [a,b] \text{ t.c. } \underbrace{\sup f - \frac{1}{n}}_{\substack{\downarrow n \rightarrow +\infty \\ \sup f}} < f(a_n) \leq \sup f$$

Thm. dei carabinieri

$$f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sup f$$

$$ii) \sup_{x \in [a,b]} f(x) = +\infty$$

(a posteriori dimostreremo che questo non è possibile, ma al momento non possiamo escluderlo)

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ \exists a_n \in [a,b] \text{ t.c. } \underbrace{f(a_n)}_{\downarrow +\infty} \geq \underbrace{n}_{\downarrow +\infty}$$

Thm. del carabinieri



$$f(a_n) \rightarrow +\infty = \sup f.$$

2°) conclusione

$$a_n \in [a,b] \Rightarrow a_n \text{ è limitata.}$$

⇒
Thm di Bolzano-Weierstrass $\exists$ una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}$ t.c.
 $a_{k_n} \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}.$

permanenza del segno

$$a_{k_n} \in [a,b] \Rightarrow x_0 \in [a,b].$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{k_n} \rightarrow x_0 \\ f \text{ continua in } x_0 \end{array} \right| \xRightarrow{\text{thm ponte.}} \boxed{f(a_{k_n}) \rightarrow f(x_0)}$$

D'altra parte, $\{f(a_n)\}$ è una sottosucc^{ne} di $\{f(a_n)\}$,
e $f(a_n) \rightarrow \sup f$.

quindi: $f(a_n) \rightarrow \sup f$.

Unicità del limite $\Rightarrow \sup f = f(x_0)$

cioè $f(x_0)$ è il max di f .

□

Quanto vale il max. di una f specifica in $[a, b]$?

Dove viene assunto? Per ora non possiamo rispondere, ci serve il concetto di densità.

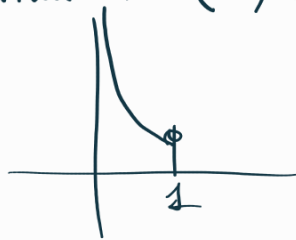
OSS Tutte le ipotesi del thm. di Weierstrass servono.

• Intervallo deve essere limitato.

$f(x) = x$ in $[0, +\infty)$ | ma non ammette massimo.
continua in $[0, +\infty)$

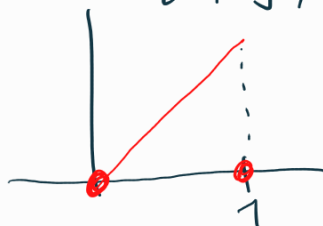
• Intervallo deve essere, oltre che limitato, chiuso

$f(x) = \frac{1}{x}$ continua in $(0, 1]$ ma non ammette massimo.

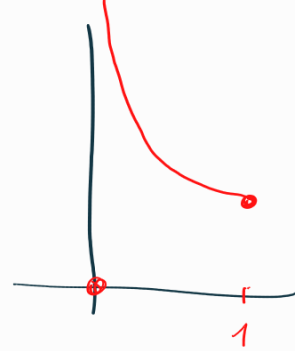


• la funzione deve essere continua.

$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ definita in $[0, 1]$, non ammette max.



$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



Varianti del teor. di Weierstrass

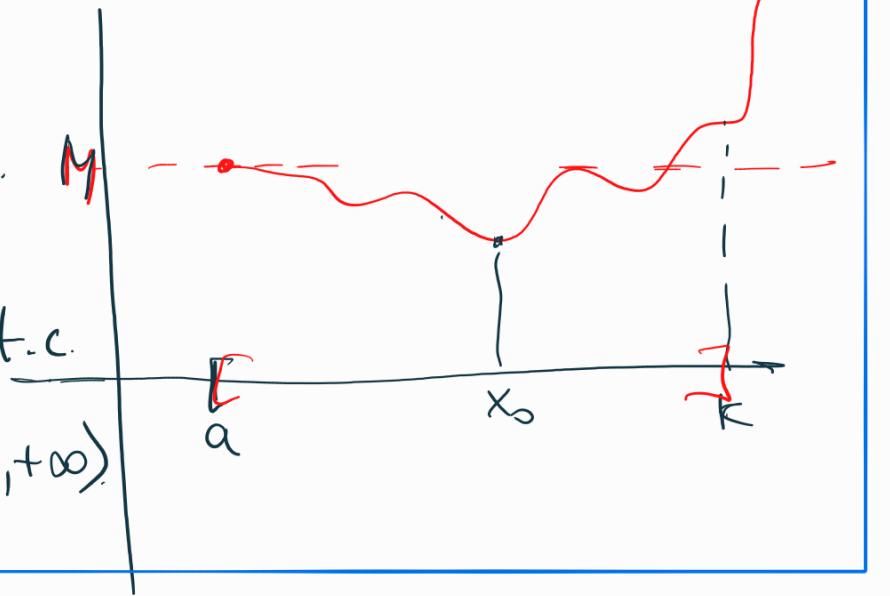
PROP 1 f continua in $[a, +\infty)$, e inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Allora f ammette minimo assoluto in $[a, +\infty)$.

cioè $\exists x_0 \in [a, +\infty)$ t.c.

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, +\infty)$$



Dim Per def^{ne} di $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$,

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists k \text{ t.c. } f(x) > M \quad \forall x > k.$$

$$\text{Prendo } M = f(a) \Rightarrow \exists k \text{ t.c. } f(x) > f(a) \quad \forall x > k.$$

Applico Weierstrass all'intervallo $[a, k]$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in [a, k] \text{ t.c. } f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, k]$$

mi servirebbe
 $\forall x \in (a, +\infty)$

$$\text{se } x > k, \text{ allora } f(x) > f(a) \geq f(x_0) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

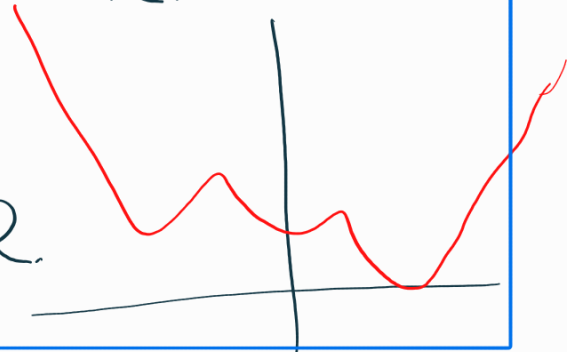
$$\text{In definitiva } f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, +\infty)$$

□

Prop. 2 Sia f continua in $\mathbb{R}$ t.c.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Allora f ammette min assoluto in $\mathbb{R}$.



$$P(x) = 17x^{12} - 7x^9 + 8x^3 + 2x + 5 = 0$$

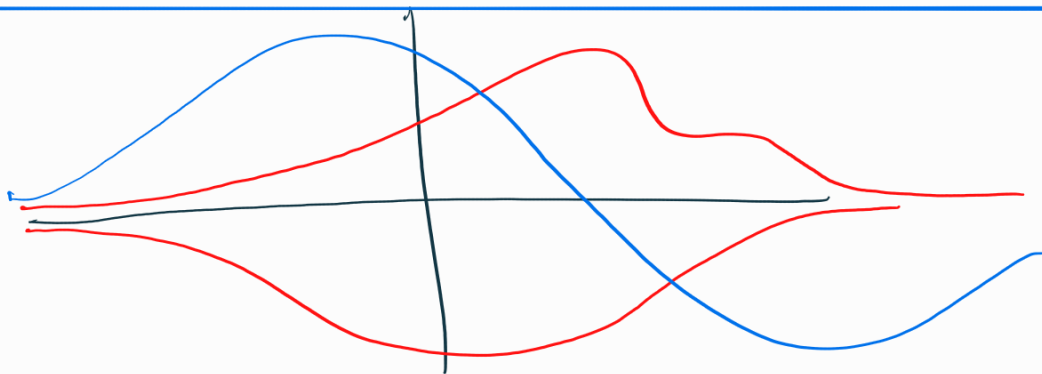
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = +\infty$$

$\Rightarrow P(x)$ ammette min. assoluto.

PROP 3 Sia f continua in $\mathbb{R}$ t.c.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}. \text{ Allora:}$$

Allora f ammette almeno uno tra massimo assoluto e min assoluto.



Determinare $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$h(x) = \begin{cases} 2^x + b & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{\sin(4x-8)}{2b-bx} & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

sia continua.

In $(-\infty, 2)$ la funzione è continua.

Infatti, se $x_0 < 2$, in un intorno di x_0

$h(x) = 2^x + b$, e questa è continua $\forall b \in \mathbb{R}$.

In $(2, +\infty)$ la funzione $h(x) = \frac{\sin(4x-8)}{b(2-x)}$
è continua, $\forall b \neq 0$.

$x_0 = 2$. La funzione è sicuramente da sinistra

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2^x + b) = 4 + b = h(2)$$

Vediamo se è continua da destra?

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sin(4x-8)}{b(2-x)} \stackrel{?}{=} h(2) = 4 + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sin(4(x-2))}{b(2-x)} = -\frac{4}{b}$$

La funz. è continua da destra in $x_0 = 2$ se e solo se

$$4 + b = -\frac{4}{b}$$

$$4b + b^2 = -4$$

$$b^2 + 4b + 4 = 0$$

$$(b+2)^2 = 0$$

$$\boxed{b = -2}$$

Se $b = -2$ la funzione è continua in $\mathbb{R}$.

Se $b \neq -2$ la funzione ha una disc. di salto in $x_0 = 2$.

Determinare il dominio di queste funzioni e dire se sono estendibili con continuità nei punti in cui non sono definite.

$$f(x) = (2\sin^2 x)^{\frac{1}{\cos(2x)}}$$

$$\cos(2x) \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

dove $2\sin^2 x$ vale 0, cioè $x = k\pi$,

$$\text{l'esponente } \frac{1}{\cos(2x)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{Dominio } f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}$$

f è continua nel suo dominio.

In $x = \frac{\pi}{4}$ la funzione non è definita,

ma l'esercizio chiede di controllare se si può estendere con continuità, cioè se posso porre $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = y_0$

in modo che f risulti continua in $\frac{\pi}{4}$

Devo vedere se esiste $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (2\sin^2 x)^{\frac{1}{\cos(2x)}} = (1^{\pm\infty}) =$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (2\sin^2 x)^{\frac{1}{1-2\sin^2 x}} = \lim_{y \rightarrow 1} y^{\frac{1}{1-y}} =$$

$$2\sin^2 x = y \rightarrow 1$$

$$= \lim_{y \rightarrow 1} e^{\frac{1}{1-y} \log y} = e^{-1}$$

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{1}{1-y} \log(y) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\log(1+(y-1))}{\frac{y-1}{1}} = -1$$

$$\log(1+t) \sim t \quad \left| \quad \log(1+(y-1)) \sim y-1 \right. \quad \begin{matrix} t \rightarrow 0 \\ \text{per } y \rightarrow 1 \end{matrix}$$

Poniamo $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \\ e^{-1} \end{cases}$

nel suo dominio

$$\text{se } x = \frac{\pi}{4}$$

$$\tilde{f} \text{ è continua in } \frac{\pi}{4}$$

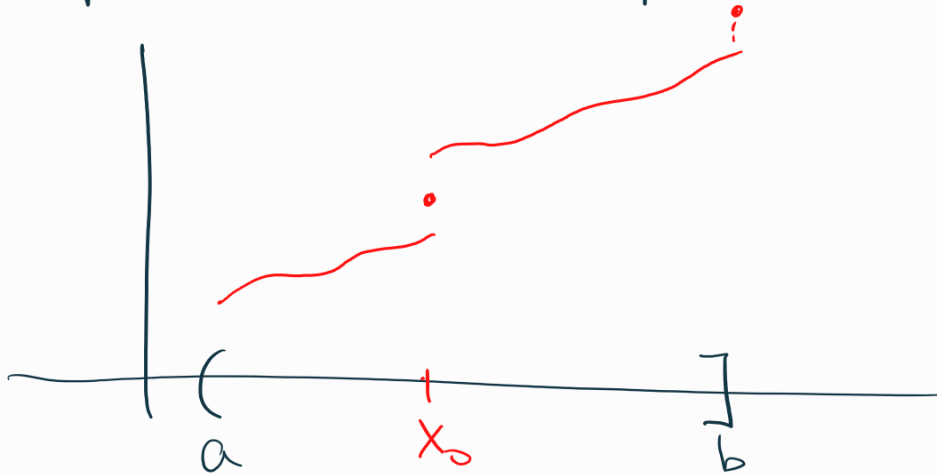
Poiché f è pari, anche $-\frac{\pi}{4}$ la situazione è uguale

Inoltre f è periodica di periodo π .

$\Rightarrow f$ diventa continua in tutto $\mathbb{R}$ se
la poniamo pari a e^{-1} nei punti $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$
in cui non è definita.

Discontinuità di una funz. monotona

Sia f monotona in un intervallo I (per es. crescente)
Che tipo di discontinuità può avere?



Teorema: Sia f una funzione crescente in I .
Allora f può ammettere solo discontinuità di salto.
(oppure discontinuità eliminabili agli estremi)