

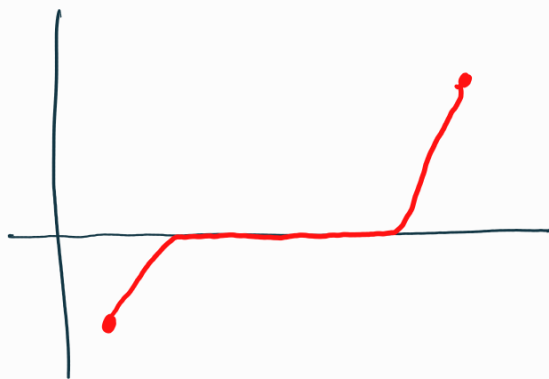
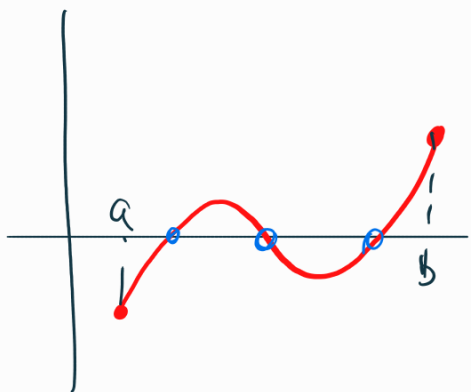
TEOREMA di esistenza degli zeri

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$.

Se $f(a)f(b) < 0$ (cioè: $f(a)$ e $f(b)$ hanno segni discordi),

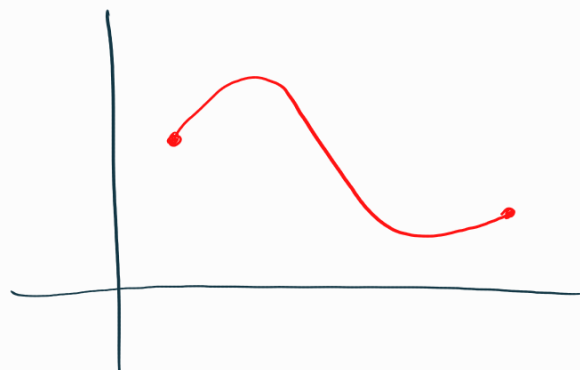
$\exists c \in (a, b)$ t.c. $f(c) = 0$.

OSS tale c non è unico (vedi grafici)

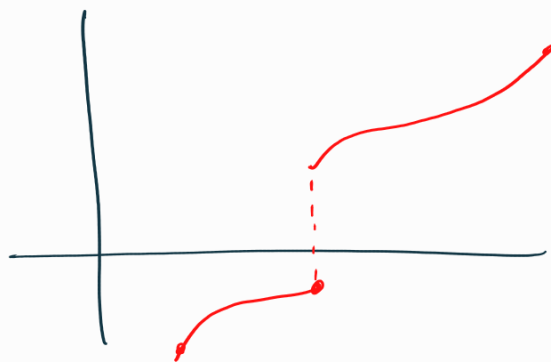


OSS Tutte le ipotesi servono.

$f(a)f(b) < 0$ serve

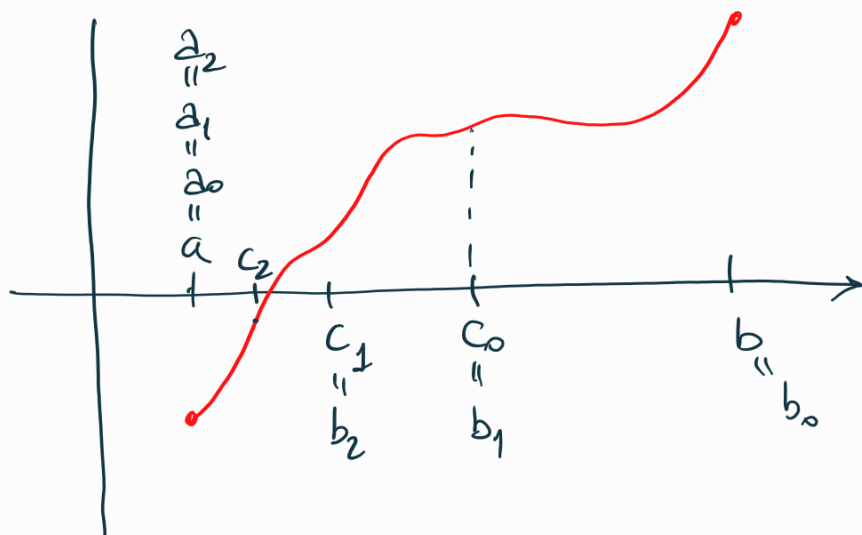


f continua serve:



Dim Supponiamo $f(a) < 0 < f(b)$.

Poniamo $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$



- se $f(c_0) = 0$, ho finito.
 - se $f(c_0) > 0$, prendo $d_1 = a_0$, $b_1 = c_0$ e vado al prossimo passaggio
 - se $f(c_0) < 0$, definisco $d_1 = c_0$, $b_1 = b_0$
-

Definisco $c_1 = \frac{d_1 + b_1}{2}$

- se $f(c_1) = 0$, ho finito
 - se $f(c_1) > 0$, definisco $d_2 = d_1$, $b_2 = c_1$ e proseguo
 - se $f(c_1) < 0$, definisco $d_2 = c_1$, $b_2 = b_1$ e proseguo.
-

Continuo in questa maniera.

- Se in questo processo trovo un c_n t.c. $f(c_n) = 0$.
ho finito.
- se questo non avviene, ho costruito due succ.ⁿⁱ.
 $\{d_n\}, \{b_n\}$ verificanti.
- $\{d_n\}$ crescente $\{b_n\}$ decrescente

$$a \leq a_n < b_n \leq b$$

$$\bullet f(a_n) < 0$$

$$f(b_n) > 0$$

$$\bullet b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

$\{a_n\}$ è crescente e limitata $\Rightarrow a_n \rightarrow c \in \mathbb{R}$.

$$a_n \leq b \Rightarrow c \leq b \quad \left| \begin{array}{l} \text{permanenza} \\ \text{del segno} \end{array} \right. \Rightarrow a \leq c \leq b$$

$\{b_n\}$ è decrescente e limitata $\Rightarrow b_n \rightarrow c' \in [a, b]$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 c' c

Unicità del limite $\Rightarrow c' = c$.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ è continua in } c \\ (\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)) \\ a_n \rightarrow c \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{thm ponte}} f(a_n) \rightarrow f(c)$$

$$f(a_n) < 0 \Rightarrow \boxed{f(c) \leq 0}$$

permanenza del segno.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ è continua in } c \\ b_n \rightarrow c \end{array} \right\} \Rightarrow f(b_n) \rightarrow f(c)$$

$$f(b_n) > 0 \Rightarrow \boxed{f(c) \geq 0}$$

$$f(c) = 0$$

Oss Questa dimostrazione suggerisce un metodo (metodo di bisezione) per trovare c con un errore fissato arbitrariamente.

Provare che il polinomio $P(x) = x^6 - x^3 + x^2 - 8$ ammette almeno due zeri nell'intervallo $[-2, 2]$.

$P(x)$ è una f. continua.

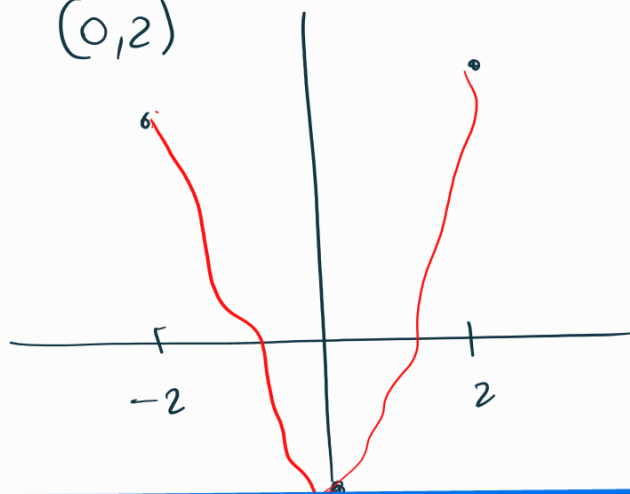
$$f(2) = 64 - 8 + 4 - 8 = 52$$

$$f(-2) = 64 + 8 + 4 - 8 = 68$$

$$f(0) = -8$$

Poiché f cambia segno tra -2 e 0 , c'è uno zero di $P(x)$ in $(-2, 0)$.

" " " " " 0 e 2 , c'è uno zero di $P(x)$ in $(0, 2)$



COROLLARIO (teorema dei valori intermedi).

Sia f continua in I intervallo (aperto, chiuso, limitato, illimitato).

Allora f assume tutti i valori compresi tra

$$\inf f = \inf \{ f(x) : x \in I \}$$

$$\text{e } \sup f = \sup \{ f(x) : x \in I \}$$

OSS $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$\Rightarrow f$ assume tutti i valori compresi tra

$$\inf x^3 = -\infty \quad \text{e} \quad \sup x^3 = +\infty$$

cioè $f(x) = x^3$ è suriettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

OSS Quindi se f è continua in I intervallo,

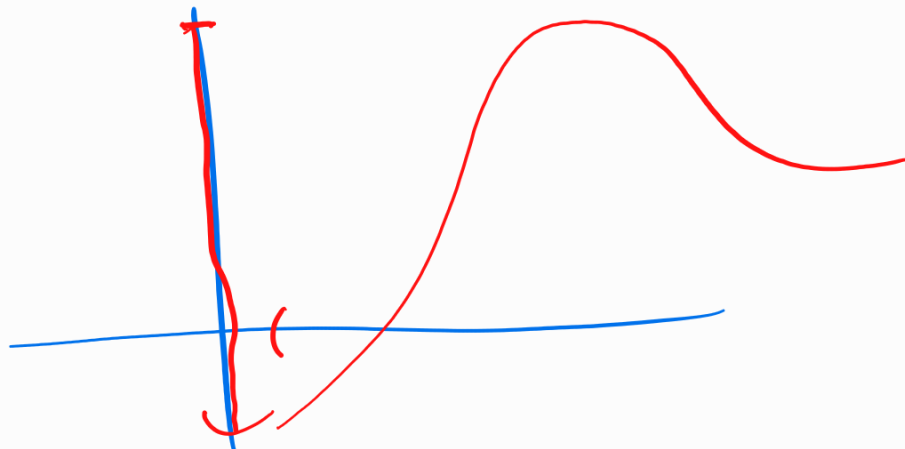
$$\text{im} f = \{ y \in \mathbb{R} : \exists x \in I \text{ verificante } f(x) = y \}$$

$$= \{ f(x) : x \in I \}$$

è un intervallo.

Enunciato sintetico del corollario:

L'immagine di una funzione continua in un intervallo è un intervallo



Dim. Corollario

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\inf f. < \lambda < \sup f$

Devo provare che $\exists x \in I$ t.c. $f(x) = \lambda$.

Poiché $\lambda < \sup f. \Rightarrow \exists x_1 \in I$ t.c. $f(x_1) > \lambda$

$\lambda > \inf f \Rightarrow \exists x_2 \in I$ t.c. $f(x_2) < \lambda$

Se pongo $g(x) = f(x) - \lambda$ continuo in I

$$g(x_1) = f(x_1) - \lambda > 0$$

$$g(x_2) = f(x_2) - \lambda < 0$$

Applico il thm. di esistenza degli zeri all'intervallo di estremi x_1 e x_2 (per es. $[x_1, x_2] \subset I$)

$$\Rightarrow \exists x \in [x_1, x_2] \text{ t.c. } \underset{\text{"}}{g(x)} = 0$$

$$f(x) - \lambda$$

$$\text{cioè } f(x) = \lambda.$$

Esempio: $f(x) = \sin x \Big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$
continuo.

$$\inf f(x) = \min f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

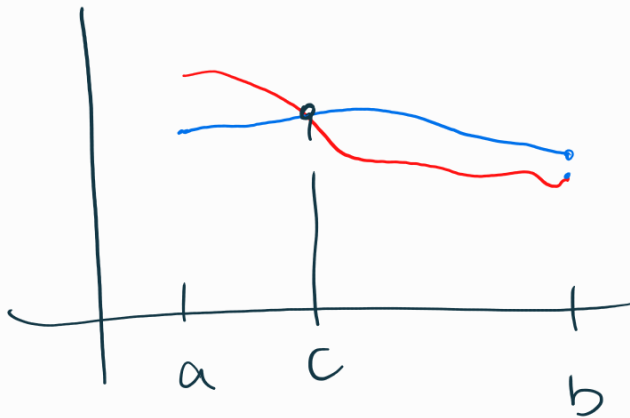
$$\sup f(x) = \max f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

⇒ nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la funzione $\sin x$ assume tutti i valori in $[-1, 1]$

COROLLARIO 2 f, g funzioni continue in $[a, b]$, t.c.

$$f(a) < g(a) \quad , \quad f(b) > g(b).$$

Allora $\exists c \in (a, b)$ t.c. $f(c) = g(c)$



Dim. Pongo $h(x) = f(x) - g(x)$ continua in $[a, b]$.

$$h(a) < 0, \quad h(b) > 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b) \text{ t.c. } h(c) = 0$$

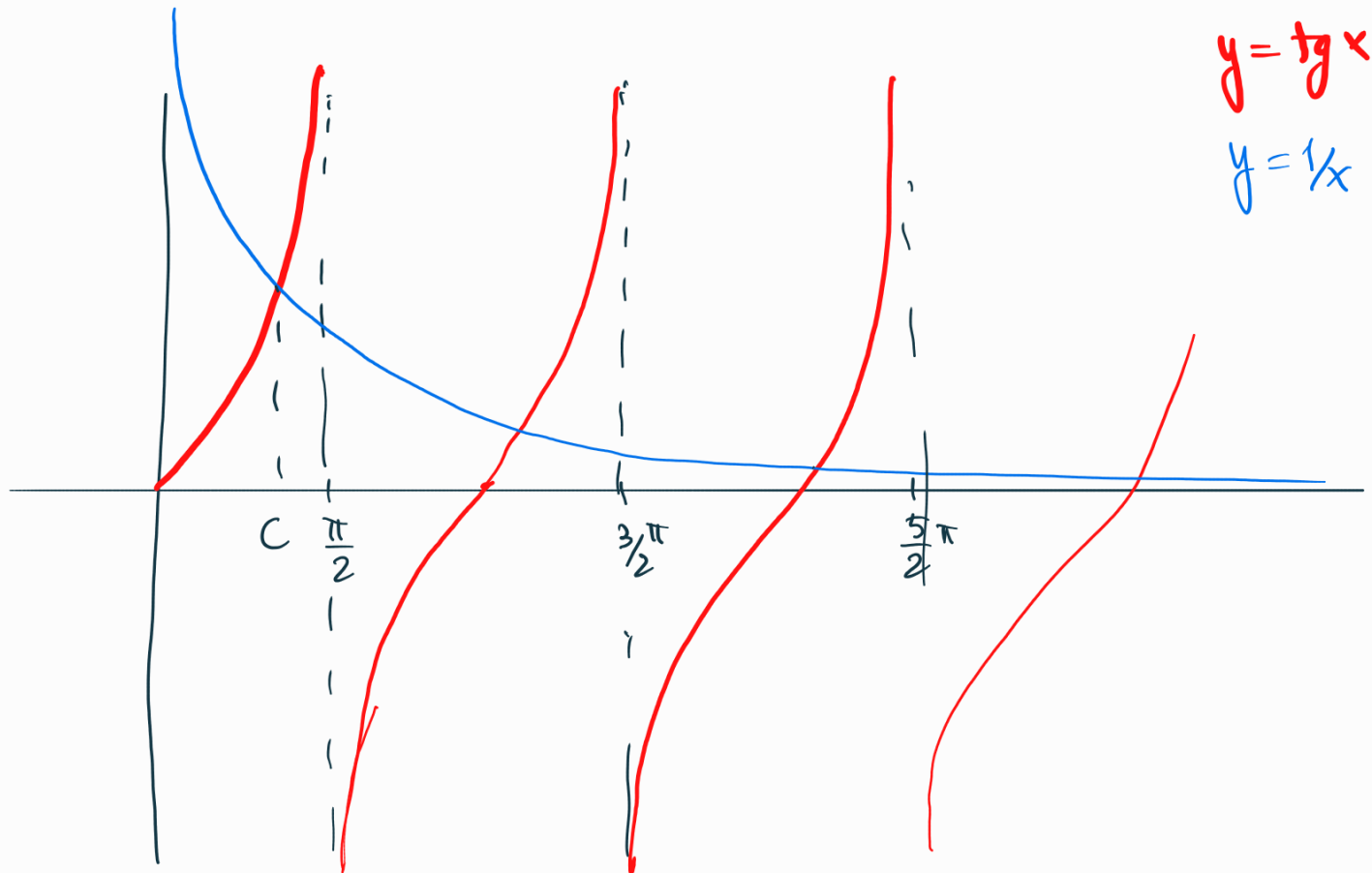
$\uparrow$
thm. di esistenza degli zeri.

$$f(c) - g(c)$$

Problema: Voglio sapere quante solⁿⁱ ha l'eq^{ue}.

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{x}$$

Oss le due funzioni sono dispari $\Rightarrow$ basta studiare per $x > 0$



Esaminiamo l'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$

Poiché per $x \rightarrow 0^+$ $\text{tg } x \rightarrow 0$, $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$.

$\exists x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ t.c. $\text{tg } x_1 < \frac{1}{x_1}$

Poiché per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ $\text{tg } x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow \frac{2}{\pi}$

$\exists x_2 \in (x_1, \frac{\pi}{2})$ t.c. $\text{tg } x_2 > \frac{1}{x_2}$

Applico il corollario 2 all'intervallo $[x_1, x_2]$

$\exists c \in [x_1, x_2] \in (0, \frac{\pi}{2})$ t.c. $\text{tg } c = \frac{1}{c}$.

Tale c è unico perché $\frac{1}{x}$ è strett. decrescente in $(0, \frac{\pi}{2})$
e $\text{tg } x$ " " crescente $(0, \frac{\pi}{2})$

Per lo stesso motivo $\exists!$ sol^{ne} in $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$.

e poi un'altra in $(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi)$

e in definitiva una in ogni intervallo della forma
 $((2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+3)\frac{\pi}{2})$ $k=0,1,2,\dots$

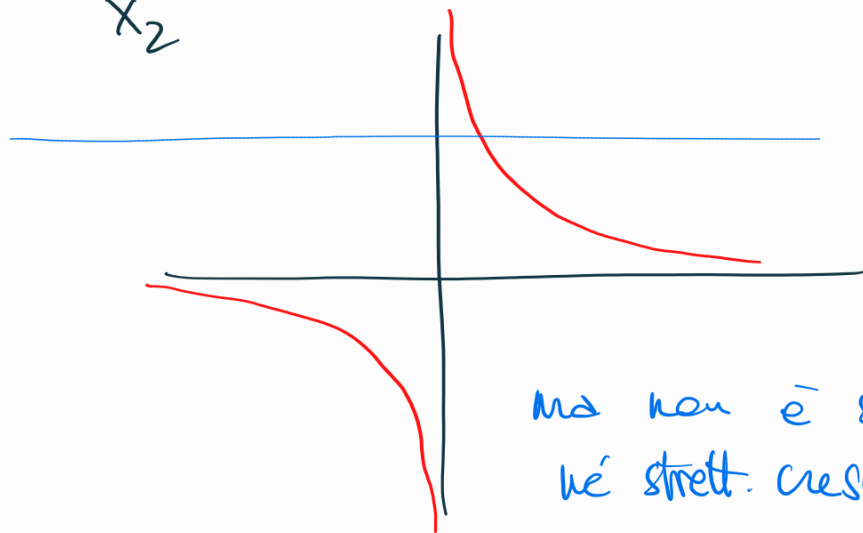
f strett. monotona (strett. crescente o strett. decrescente)
 $\Rightarrow f$ iniettiva.

Vale il viceversa?

f iniettiva $\rightarrow f$ monotona?

In generale no: $f(x) = \frac{1}{x}$ è iniettiva

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \stackrel{?}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$



ma non è strett. decrescente
né strett. crescente.

Tuttavia, se aggiungiamo l'ipotesi che f sia continua
in un intervallo, il viceversa è vero.

TEOREMA Sia f continua in I intervallo.

Allora

f iniettiva $\Leftrightarrow f$ strett. monotona.

Dim. $\boxed{\Leftarrow}$ ovvia

$\boxed{\Rightarrow}$ basta provare che f è monotona, perché

$\begin{matrix} f \text{ iniettiva} \\ f \text{ crescente} \end{matrix} \Rightarrow f \text{ strett. crescente.}$

Supponiamo che f non sia monotona, quindi:
né crescente né decrescente in I .

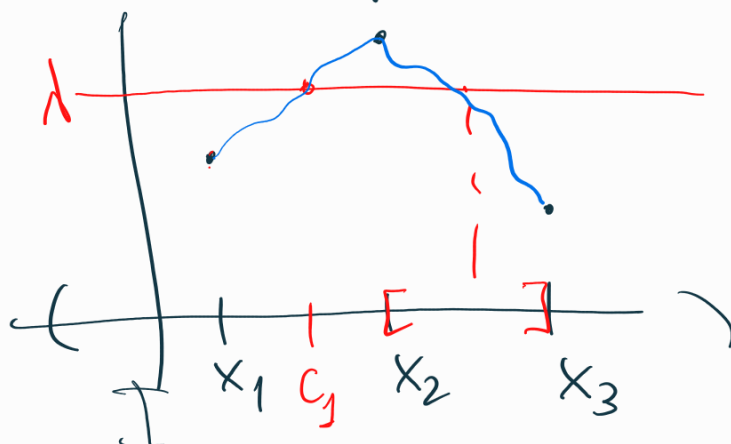
In tal caso si deve verificare una di queste due possibilità

$\exists x_1 < x_2 < x_3 \text{ t.c. } f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$

oppure

$\exists x_1 < x_2 < x_3 \text{ t.c. } f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$

Supponiamo quest.



$\exists c_1 \in (x_1, x_2) \text{ t.c. } f(c_1) = \lambda$

$\exists c_2 \in (x_2, x_3) \text{ t.c. } f(c_2) = \lambda$

e questo contraddice l'iniettività.

