

Funzioni continue

DEF Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in X$.

Se x_0 è anche pto di accumul^{ne} per X , diremo che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

(Se x_0 invece è pto isolato di X , diremo che f è sempre continua in x_0)

Diremo che f è continua in X se è continua in ogni punto $x_0 \in X$. In tal caso scriveremo $f \in C(X)$.

Esempi di funzioni continue nel loro dominio

$f(x) = x^3$ è continua in $\mathbb{R}$.

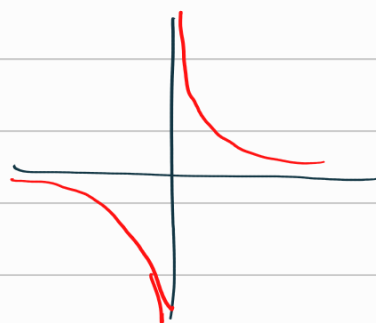
Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow x_0} x^3 = x_0^3$

Tutte le potenze sono continue nel loro dominio
 $f(x) = x^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\alpha = \frac{1}{2}$ $f(x) = \sqrt{x}$ continua in $[0, +\infty)$.

$\alpha = \frac{2}{5}$ $f(x) = x^{2/5}$ continua in $\mathbb{R}$.

$\alpha = -1$ $f(x) = \frac{1}{x}$ continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



Altre funzioni continue nel loro dominio:

Logaritmi $f(x) = \log_b x$ è continua in $(0, +\infty)$
 $\forall b > 0, b \neq 1$

Espponentiali $f(x) = a^x$ è continua in $\mathbb{R}$
 $\forall a > 0$

Funzioni trigonometriche

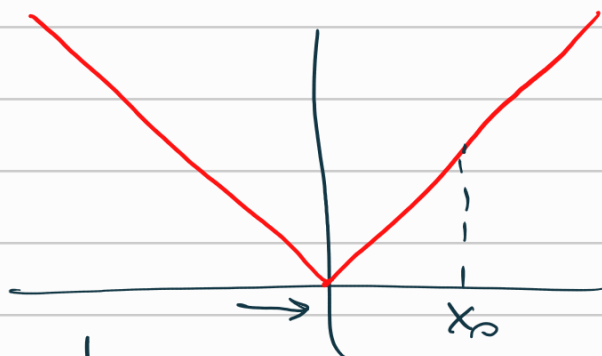
$\cos x$ continua in $\mathbb{R}$.

$\sin x$

$\operatorname{tg} x$

continua in $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

$f(x) = |x|$ è continua in $\mathbb{R}$.



1° modo Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, voglio provare che $\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = |x_0|$.

a) se $x_0 > 0$, allora in un intorno di x_0 , $|x| = x$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 = |x_0|$$

b) se $x_0 < 0$, allora $|x| = -x$ in un intorno di x_0

c) se $x_0 = 0$, facciamo separatamente $\lim_{x \rightarrow 0^+}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = |0|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 = |0|$$

2) dim. sintetica: usando la dis. triangolare per la differenza

$$0 \leq ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|$$

$\downarrow x \rightarrow x_0$
0

Thm. carab.

$\Rightarrow$

$$||x| - |x_0|| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \text{ e quindi } |x| \rightarrow |x_0|$$

OSS Riscrivo la def^{ne} di f continua in x_0

f continua in $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c.

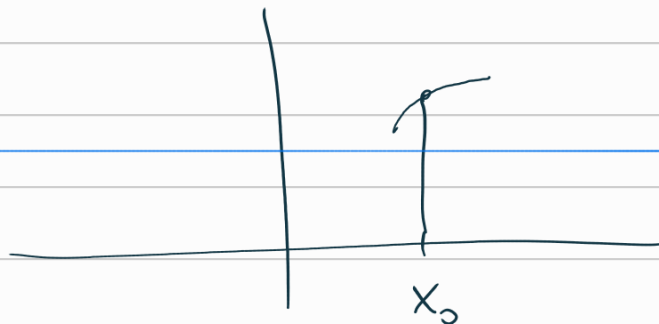
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in X \text{ verificante}$$

$$(0 <) |x - x_0| < \delta$$

non serve perché se $x = x_0$ si ha
 $f(x) = f(x_0)$.

Conseguenze immediate della def^{ne}

PERMANENZA del segno Se f è continua in x_0 ,
e $f(x_0) > 0$, allora esiste un intorno di x_0 in cui
 $f(x) > 0$.



Teorema (Aritmetica delle funzioni continue)

Se $f(x), g(x): X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, f, g continue in x_0

Allora sono continue in x_0 anche:

- $f(x) + g(x)$

- $\alpha f(x) + \beta g(x) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $f(x)g(x)$

- $\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{purché } g(x_0) \neq 0$

Quindi, per esempio $f(x) = \frac{x^3 + e^x}{\sin x + 5 \log x}$
è continua nel suo dominio.

COMPOSIZIONE di FUNZIONI CONTINUE

Siano $g: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$, $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$.

(Quindi resta definita la funzione composta

$$f \circ g: \begin{matrix} \cancel{X} \\ \cup \\ X \end{matrix} \rightarrow \mathbb{R}$$

$x \mapsto f(g(x))$

Se g è continua in x_0 , e f è continua in $g(x_0)$,
allora $f \circ g$ è continua in x_0 .

Dim (mediante il teorema del limite di f -composta.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) \quad (\text{continuità di } g \text{ in } x_0)$$

$$\lim_{y \rightarrow g(x_0)} f(y) = f(g(x_0)) \quad (\text{continuità di } f \text{ in } g(x_0))$$

Teor. del limite di f. composta

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(\underbrace{g(x)}_{\substack{\downarrow \\ g(x_0)}}) = \lim_{y \rightarrow g(x_0)} f(y) = f(g(x_0))$$

$y = g(x) \rightarrow g(x_0)$

Attenzione, non ho imposto la cond^{ne} (*):

$(g(x) \neq g(x_0) \text{ def^{te} per } x \rightarrow x_0)$ perché (vedi oss. della scorsa lezione)

Questa non serve quando

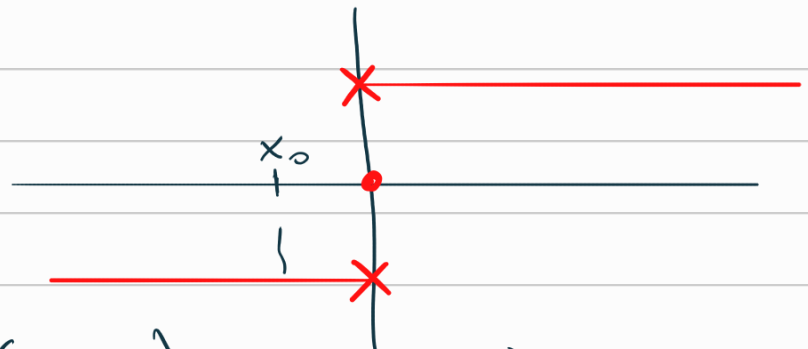
$$\lim_{y \rightarrow y_0 = g(x_0)} f(y) = f(y_0)$$

$\underbrace{\quad}_{g''(x_0)} \quad \text{,, } e^{x \log(e^x + 1)}$

Quindi, per es. $f(x) = \frac{(e^x + 1)^x}{\sqrt[4]{(x+1)^2 + \cos^4 x}}$ continua nel suo dominio $(\mathbb{R})$

Esempi di funzioni discontinue.

$$f(x) = \text{sign } x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$\text{sign } x$ è continua in $(0, +\infty)$ e in $(-\infty, 0)$,

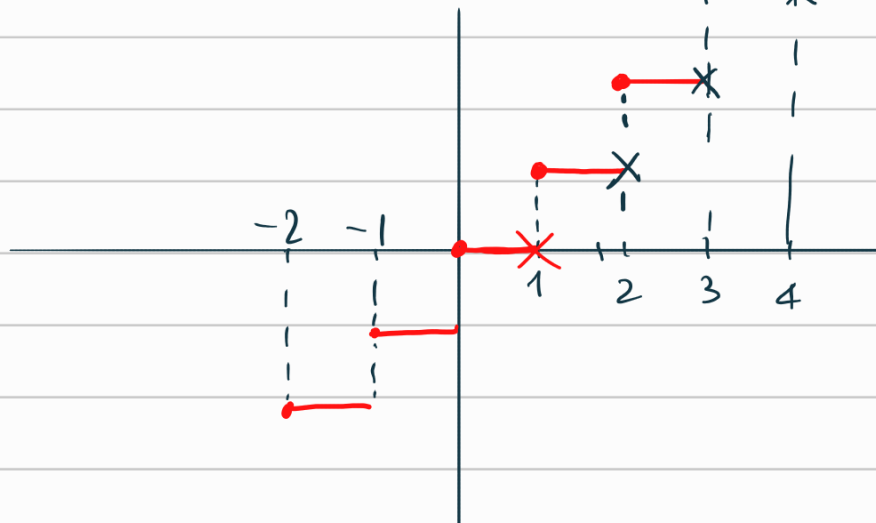
ma è discontinua in 0.

In fatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sign } x \neq$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sign} x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sign} x = -1$$

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \max \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$$



oss. la funzione è continua in $x_0 \forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Ma f è discontinua in $x_0 \forall x_0 \in \mathbb{Z}$.

$$x_0 \in \mathbb{Z} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \rightarrow x_0^+} x_0 = x_0 = \lfloor x_0 \rfloor \quad \text{continua da destra.}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \rightarrow x_0^-} (x_0 - 1) = x_0 - 1 = \lfloor x_0 - 1 \rfloor \neq \lfloor x_0 \rfloor \quad \text{discontinua da sx.}$$

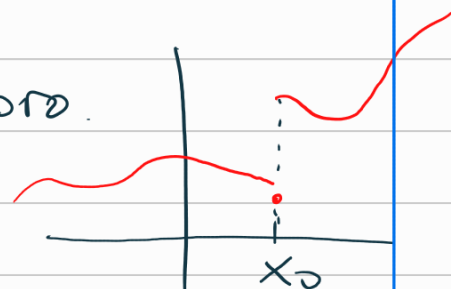
Le precedenti due funzioni hanno dei punti di discontinuità di salto (o di prima specie).

DEF

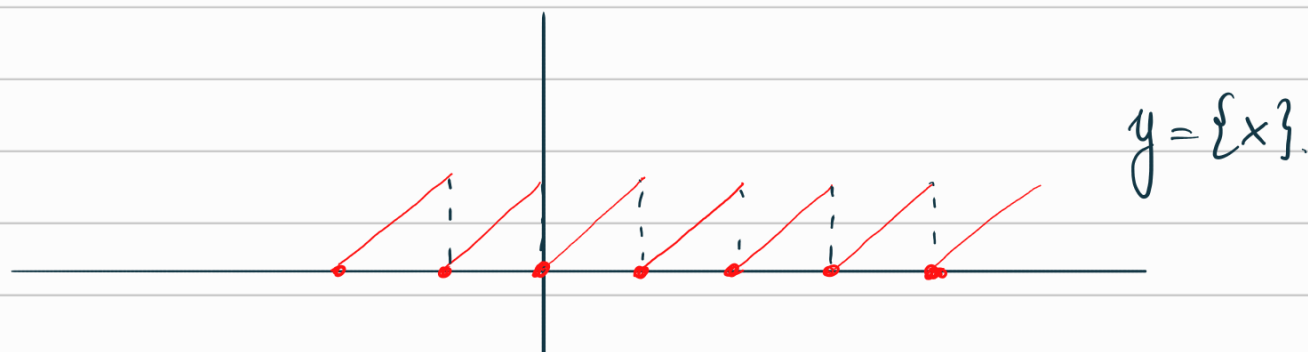
f ha una discontinuità di salto in x_0 se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \quad \text{entrambi reali,}$$

ma tali limiti sono diversi tra loro.



Altro esempio $f(x) = \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ parte frazionaria di x .



Discontinuità di salto negli interi relativi, dove è continua da destra, ma non da sinistra

Continua negli altri punti

Periodica di periodo 1: $f(x) = f(x+1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Classificazione dei punti di discontinuità.

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ pto non isolato di X .

Se f non è continua in x_0 , diremo che:

1) f ha una "discontinuità eliminabile" in x_0 se

$\exists$ finito $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, ma è diverso da $f(x_0)$

Si chiama discontinuità eliminabile perché si elimina la discontinuità cambiando il valore di f in x_0 .

Prendiamo $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & \text{se } x = x_0, \end{cases}$

Questo risulta continuo in x_0 .

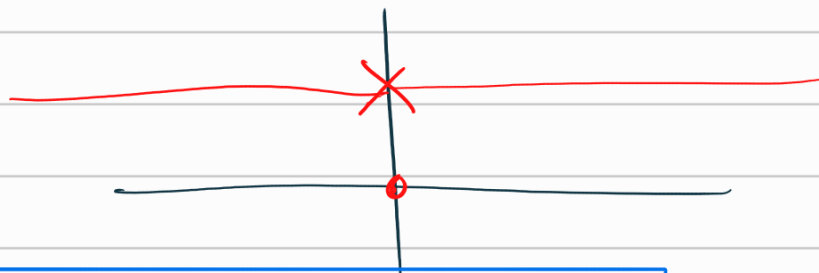
Esempio $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$\begin{array}{l} \neq \\ f(0) \\ = \\ 5 \end{array}$$

Esempio $f(x) = (\text{sign } x)^2 = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$



2) discontinuità di salto o di 1^a specie
(già visto)

3) discontinuità di 2^a specie:

tutti i casi rimanenti, cioè almeno uno dei limiti destro/sinistro non esiste o è infinito

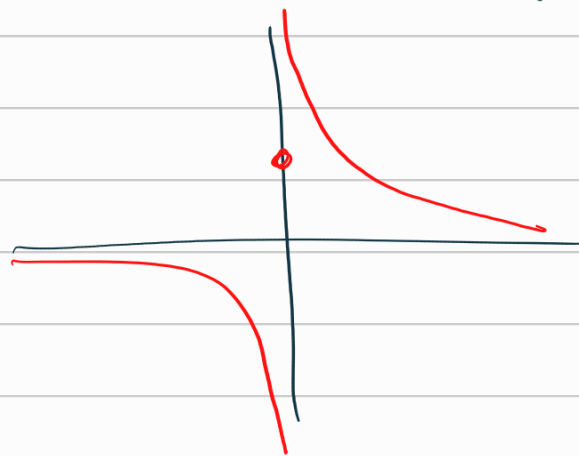
Esempio $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

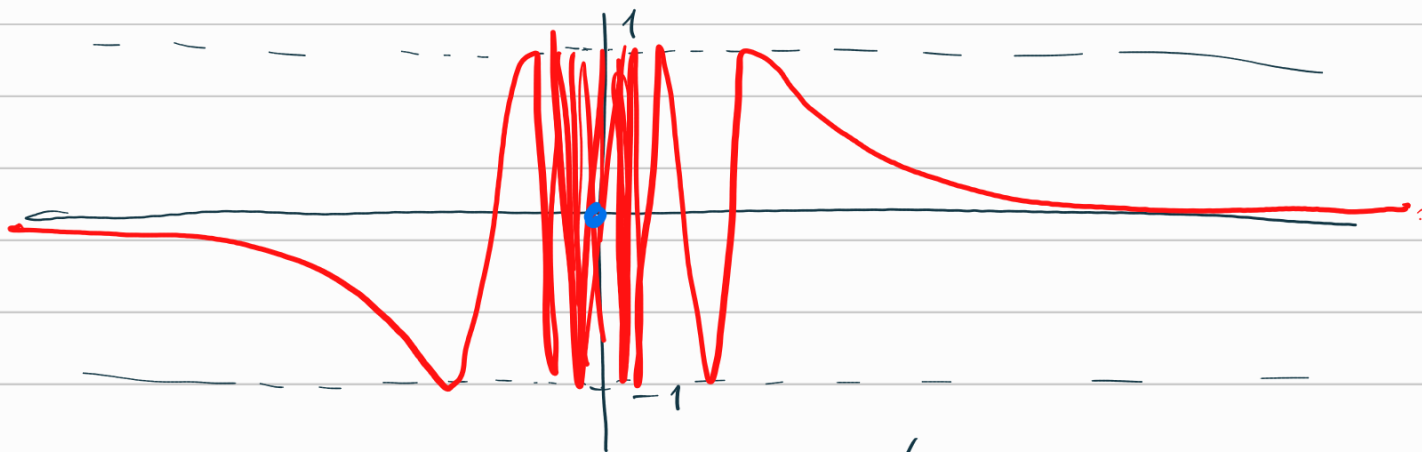
per $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$



Esempio $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

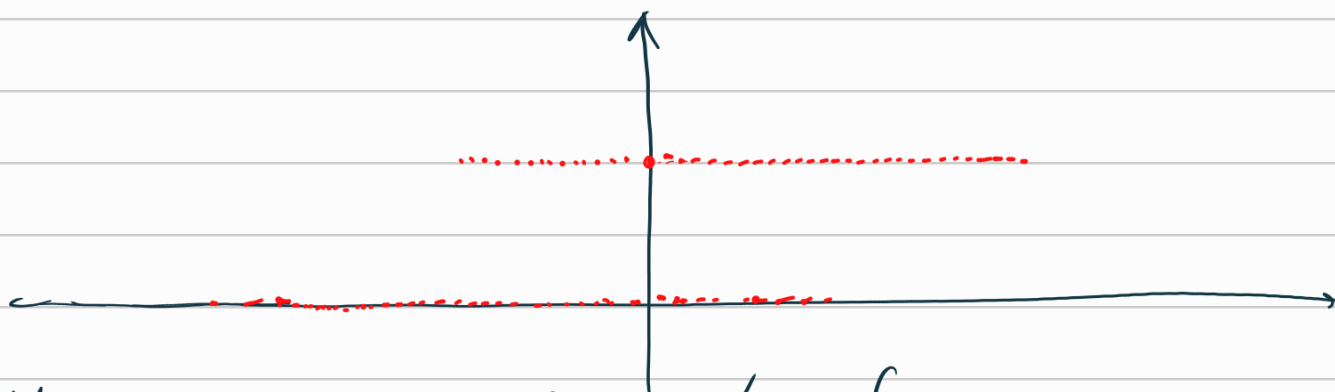


$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x} \quad \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \nexists$$

Funzione di Dirichlet.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



$$\forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \nexists$$

(in ogni intervallo
ci sono infiniti razionali
e irrazionali)

Esercizio: Studiare, al variare di $p > 0$, la
continuità di

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+px)}{x} & \text{se } x > 0 \\ \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

1) $\forall p > 0$ f è continua fuori dall'origine

se $x_0 > 0$, in un intorno di x_0 $f(x) = \frac{\log(1+px)}{x}$,
che è continua perché rapporto di f. continue

se $x_0 < 0$, in un intorno di x_0 $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2+2}$,
che è continua.

2) Pb. solo in $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+3x+1}{x^2+2} = \frac{1}{2} = f(0)$$

f è sempre continua da sinistra
in $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+px)}{px} \stackrel{?}{=} f(0) = \frac{1}{2}$$

$\parallel$
 p

$\Rightarrow f$ è continua in 0 (e quindi in $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$.

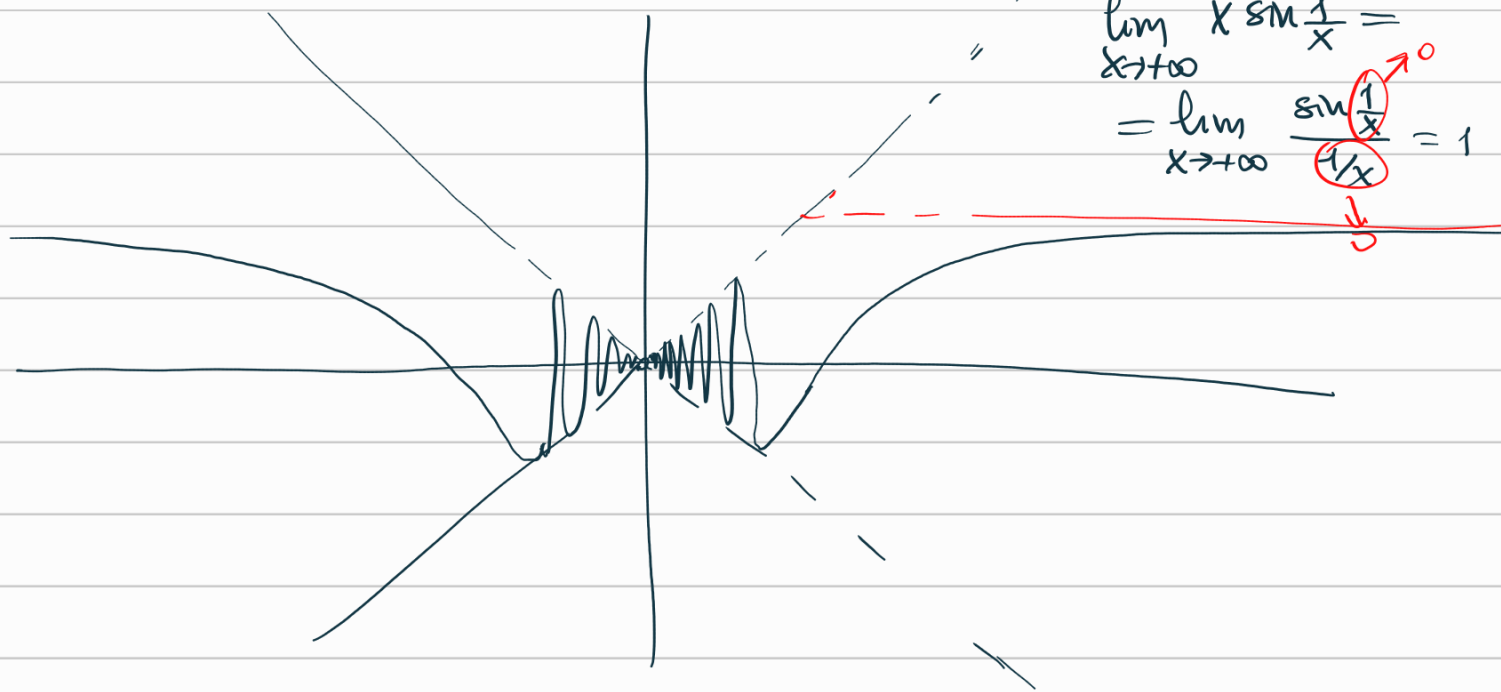
Se $p \neq \frac{1}{2}$, f ha una discontinuità di salto in $x_0 = 0$.

Studiare la continuità di $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Nessun pb. di continuità nei punti $x_0 \neq 0$.

$$x_0 = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x}_{\downarrow 0} \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\text{limitato}} = 0 = f(0)$$

$\Rightarrow f$ continua in 0 $\Rightarrow f$ continua in $\mathbb{R}$.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

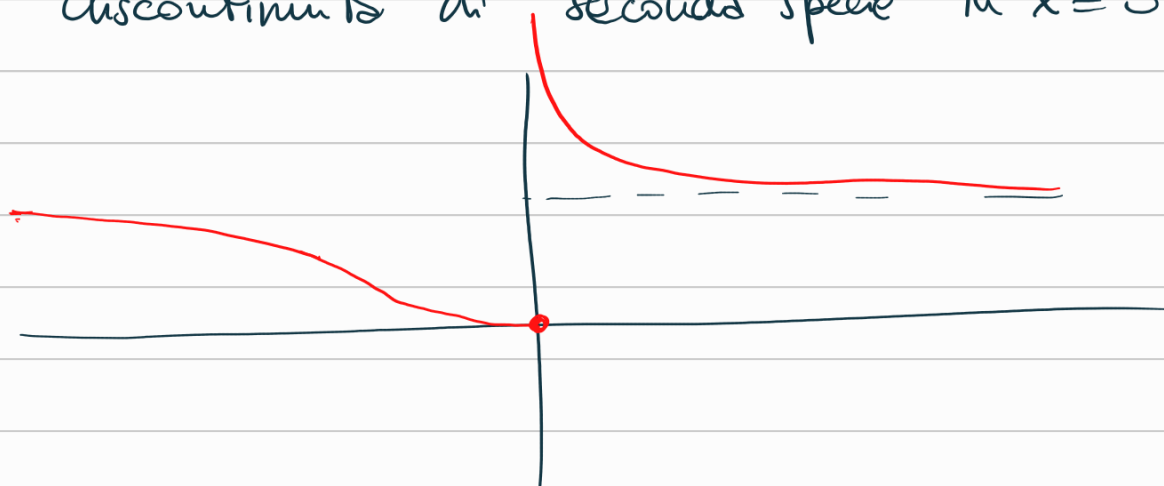
Continua evidentemente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x} \stackrel{?}{=} 0$$

No, perché $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$ f continua da sinistra in 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

discontinuità di seconda specie in $x=0$



TEOREMA di esistenza degli zeri

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$.

Se $f(a)f(b) < 0$ (cioè: $f(a)$ e $f(b)$ hanno segni discordi),

$\exists c \in (a, b)$ t.c. $f(c) = 0$.

