

Limiti di funzioni monotone

Ricordo che: per una succ^{ve} crescente $\{a_n\}$
decrecente

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

inf a_n .

Qualcosa di simile succede per le funzioni monotone.

TEOREMA Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente (decrecente)
(cioè se $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$)
 $\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ($\geq$)

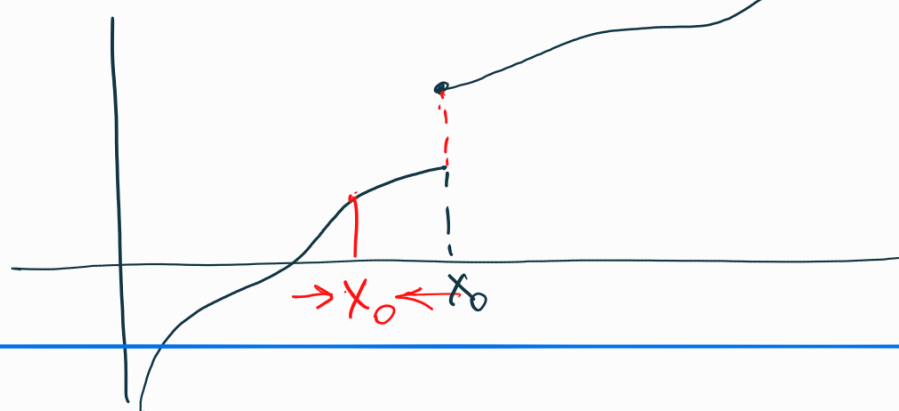
Allora:

1) Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un punto di accum. sinistro di X
(cioè ogni intorno sinistro di x_0 : $(x_0 - \delta, x_0)$ se $x_0 \in \mathbb{R}$
 $(M, +\infty)$ se $x_0 = +\infty$
contiene infiniti pti di X)

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x \in X \cap (-\infty, x_0)} f(x) \quad \left(\inf_{x \in X \cap (-\infty, x_0)} f(x) \right)$$

2) Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un pto di accum. destro di X .

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x \in X \cap (x_0, +\infty)} f(x) \quad \left(\sup_{x \in X \cap (x_0, +\infty)} f(x) \right)$$



Limite di funz. composta (cambio di variabile nei limiti)

$$\begin{array}{l} g: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R} \\ f: Y \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \quad |$$

Resta definita la funzione composta

$$f \circ g : X \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\begin{array}{c} \psi \\ x \end{array} \mapsto f \circ g(x) = f(g(x))$$

TEOREMA Siano $g: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}, f: Y \rightarrow \mathbb{R}$

Se esistono i limiti $(x_0, l, m \in \mathbb{R}^*)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \quad \lim_{y \rightarrow l} f(y) = m$$

Hyp 1 Hyp 2

e in più

$$g(x) \neq l \quad \text{def}^{\text{ta}} \text{ per } x \rightarrow x_0 \quad (*)$$

Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow l} f(y) = m.$

Dim Hyp. 2 $\forall W$ intorno di $m \exists V$ intorno di l t.c.

$$\forall y \in Y \cap V \setminus \{l\} \quad f(y) \in W$$

← è lo stesso della riga sopra

Hyp 1 $\forall V$ intorno di $l \exists U$ intorno di x_0 t.c.

$$\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\} \text{ si ha } \boxed{g(x)} \in \underbrace{V \cap Y \setminus \{l\}}_{(*)}$$

e quindi, mettendo le due insieme

$$\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(g(x)) \in W$$

cioè ho dim.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = m = \lim_{y \rightarrow l} f(y)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f \circ g(x)$$

□

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$$

$$g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$y \mapsto e^y$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) =$$
$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty$$

OSS 1 L' hyp (*) serve, altrimenti il teorema è in generale falso.

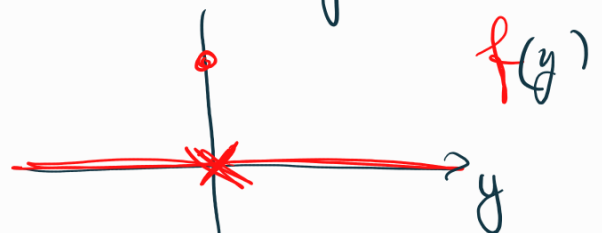
Esempio

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}$$

$$g(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 0$$

$$g(x) \equiv 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \quad \text{CORRETTO}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 ? \text{ OK} \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 0 ? \text{ OK}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 0 \quad \leftarrow \text{ERRATO}$$

OSS 2 L' hyp (*) non serve se

$$\lim_{y \rightarrow l} f(y) = f(l) \quad (\text{cioè se } f \text{ è "continuous" in } l)$$

OSS 3 Il teorema non vale se $\nexists \lim_{y \rightarrow l} f(y) \neq$

$$\nexists \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

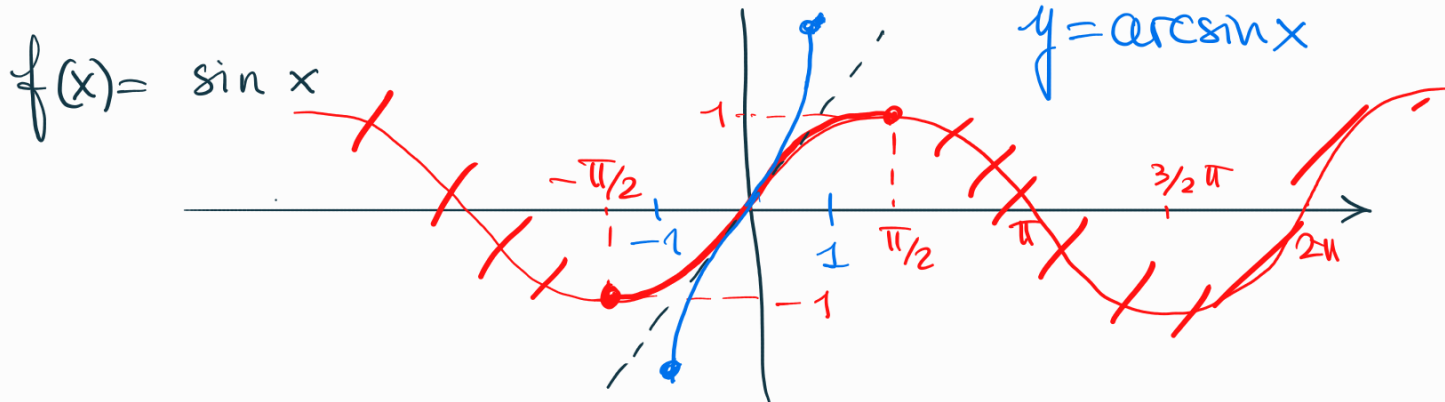
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x^2}} \right) \stackrel{?}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \quad \nexists \quad (\text{NO})$$

$$\parallel \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

Limiti notevoli riguardanti le funz. trigonometriche
inverse
arcsin, arccos, arctg.

arcsin è la funzione inversa della restrizione
di $\sin x$ all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



$$f(x) = \sin x \Big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

è biettiva.

La sua inversa si chiama arcsin.

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$y \mapsto \arcsin y = \text{l'unico } x \text{ t.c.}$
 $\sin x = y$

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

~~$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$$~~

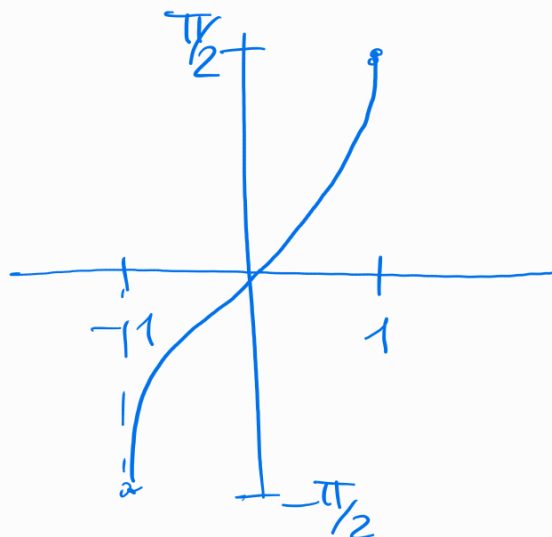
~~$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$~~

$$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\arcsin 0 = 0$$

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin (-1) = -\frac{\pi}{2}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x = 0 = \arcsin 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin x = \arcsin x_0$$

$$\forall x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x \rightarrow 0 \\ x &= \sin y \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1}$$

$$\arcsin x \sim x$$

per $x \rightarrow 0$

$$\arcsin x = x(1 + o(1))$$

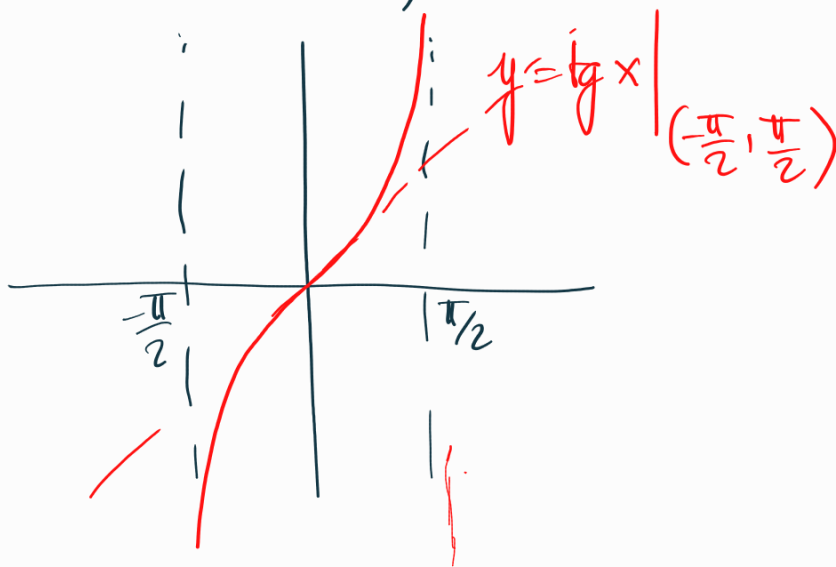
"

$$\arcsin x = x + o(x)$$

"

$\arcsin x$ è un infinitesimo di ordine 1 per $x \rightarrow 0$

$\arctg$ è l'inversa della restrizione di $\operatorname{tg} x$ all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$\left. \operatorname{tg} x \right|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ è biettiva.

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

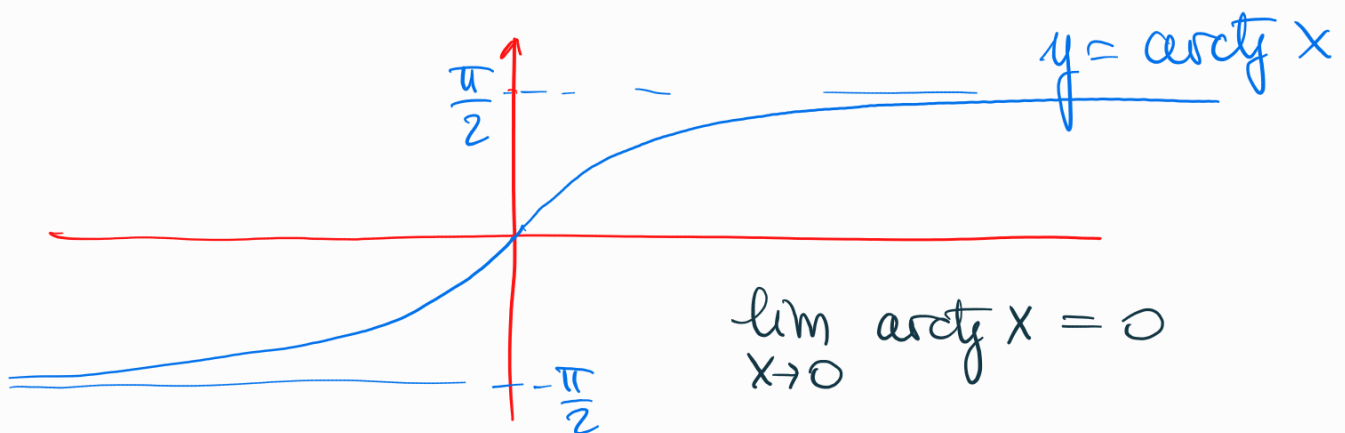
$$y \mapsto \operatorname{arctg} y = \text{l'unico } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ t.c.}$$

$$\operatorname{tg} x = y$$

$$\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = 1$$

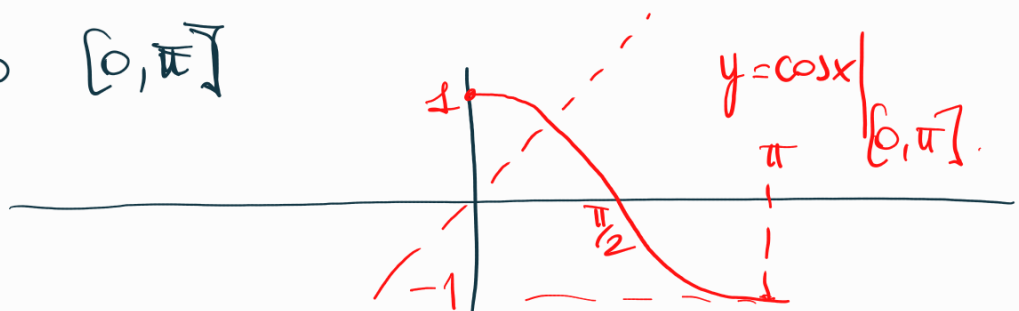
$$\operatorname{arctg} x = y \rightarrow 0$$

$$x = \operatorname{tg} y$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{arctg} x = x + o(x) \quad "$$

$\arccos$ è l'inversa della restrizione di $\cos x$ a
all'intervallo $[0, \pi]$



$$\cos|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \rightarrow [-1,1] \quad \text{biettiva}$$

La sua inversa si chiama arccos:

$$\arccos : [-1,1] \rightarrow [0,\pi]$$

$$y \longmapsto \arccos y = \text{l'unico } x \in [0,\pi] \text{ t.c. } \cos x = y. \quad \text{strett. decresc.}$$

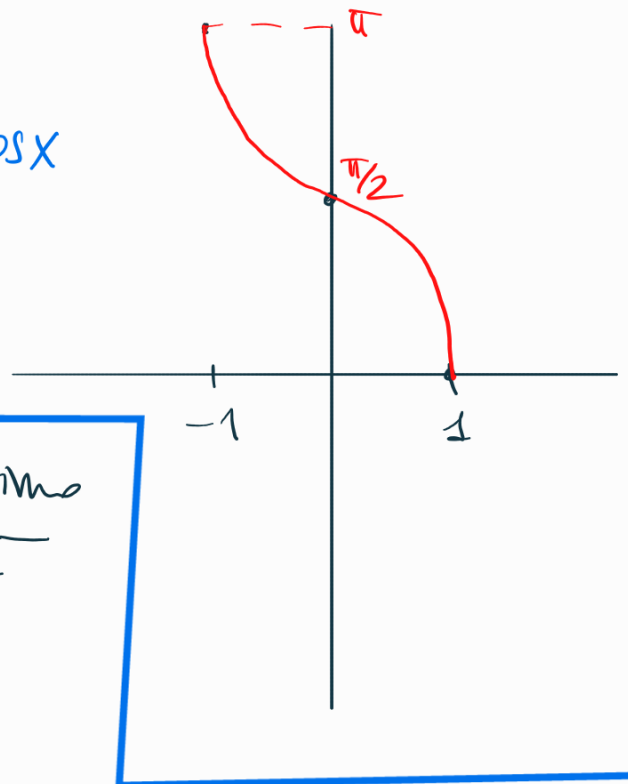
$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos 1 = 0$$

$$\arccos(-1) = \pi$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$$

$$y = \arccos x$$



Trovare l'ordine di infinitesimo
di $\arccos x$ per $x \rightarrow 1^-$

Cerco $\alpha > 0$ t.c.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{(1-x)^\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{(1-x)^\alpha} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{(1-\cos y)^\alpha} \quad \alpha = 1/2 \quad = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{(1-\cos y)^{1/2}} =$$

$$y = \arccos x \rightarrow 0^+ \quad x = \cos y \quad \sim \left(\frac{y^2}{2}\right)^\alpha = \frac{y^{2\alpha}}{2^\alpha}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{y^2}{1-\cos y} \right)^{1/2} = \sqrt{2}$$

infinitesimo
di ordine $\frac{1}{2}$.

$$\arccos x \sim \sqrt{2}(1-x)^{1/2} \quad \text{per } x \rightarrow 1^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{2}$$

Ordinare per ordine crescente di infinitesimo (per $x \rightarrow +\infty$) le seguenti funzioni:

$$f(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2x^2 + \sqrt{x}} \right) \sim \frac{x}{2x^2 + \sqrt{x}} \sim \frac{1}{2x}$$

$\downarrow x \rightarrow +\infty$
0

inf^{mo} di ordine 1 per $x \rightarrow +\infty$

$$g(x) = \sqrt{9x^4 + 5} - 3x^2 = 3x^2 \left[\sqrt{1 + \frac{5}{9x^4}} - 1 \right] \sim$$

$$(1+t)^\alpha - 1 \sim \alpha t$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

per $t \rightarrow 0$

$$\stackrel{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{5}{18x^4}$$

$$\sim 3x^2 \frac{5}{18x^4} = \frac{5}{6x^2}$$

infinitesimo di ordine?

$$k(x) = \frac{1}{2 \cos x + x^2 \log(2^x + 7)} \sim \frac{1}{x^3 \log 2} \quad \text{inf^{mo} di ordine 3}$$

$$2 \cos x + x^2 \log(2^x + 7) = x^2 \log(2^x + 7) \left[1 + \frac{2 \cos x}{x^2 \log(2^x + 7)} \right] \sim$$

$$\sim x^2 \log(2^x + 7) = x^2 \log(2^x (1 + o(1))) =$$

$\downarrow$ limitato
0 $\times$ infinito

$$= x^2 \left[\underbrace{\log 2^x}_{x \log 2} + \underbrace{\log(1 + o(1))}_{o(1)} \right] \sim x^3 \log 2$$

$2x \log 2$

$$h(x) = x^{-1 - \log x} \quad \underline{\text{farlo.}}$$
