

Proprietà dei logaritmi

$$3) \log_b \left(\frac{x}{y} \right) = \underbrace{\log_b x - \log_b y}_t \quad \forall x, y > 0$$

$$\log_b \left(\frac{x}{y} \right) \stackrel{?}{=} t \Leftrightarrow b^t \stackrel{?}{=} \frac{x}{y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^{\log_b x - \log_b y} \stackrel{?}{=} \frac{x}{y}$$

$$\parallel$$
$$\frac{b^{\log_b x}}{b^{\log_b y}} = \frac{x}{y}$$

sc'

$$4) \log_b (x^r) = r \log_b x \quad \forall x > 0, \forall r \in \mathbb{R}.$$

$$\log_b (x^r) \stackrel{?}{=} r \log_b x \Leftrightarrow b^{r \log_b x} \stackrel{?}{=} x^r$$

$$\parallel$$
$$(b^{\log_b x})^r$$
$$\parallel$$
$$x^r$$

sc'

5) Cambio di base dei logaritmi.

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\forall x > 0$$

$$\forall a, b > 0$$

$$a, b \neq 1$$

Dim

$$\log_b x \stackrel{?}{=} \frac{\log_a x}{\log_a b} \Leftrightarrow \underbrace{\log_a b}_{t} \log_b x \stackrel{?}{=} \log_a x$$

$$\Leftrightarrow a^? \stackrel{?}{=} x \Leftrightarrow \underbrace{a^{\log_a b} \log_b x}_{\substack{\parallel \\ (a^{\log_a b})^{\log_b x} \\ \parallel \\ b^{\log_b x} \\ \parallel \\ x}} \stackrel{?}{=} x$$

OK!

OSS Tutte le funzioni $\log_a x$ si ottengono l'una dall'altra moltiplicando per una costante (positiva o negativa)

Per es $\log_2 x = \frac{\log x}{\log 2}$

$$\log_{\frac{1}{e}} x = \frac{\log x}{\log \frac{1}{e}} = -\log x$$

$\parallel$
-1

$$\log_{\frac{1}{b}} x = -\log_b x \quad \forall b > 0, b \neq 1$$

$$\forall x > 0$$

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad \forall a, b > 0, a, b \neq 1.$$

Trovare il dominio naturale di

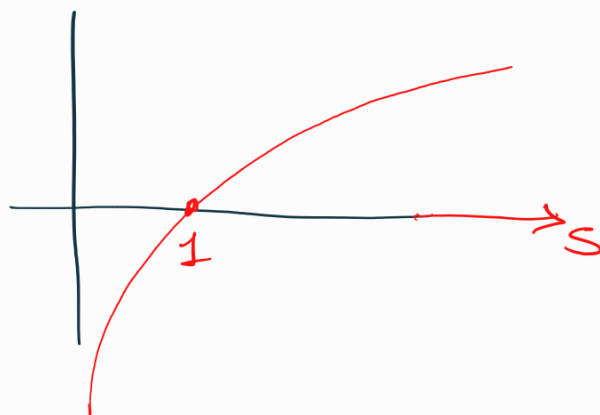
$$f(x) = (\log_3(\log_4(x^2-5)))^{-1/4}$$

Consiglio cominciare dalla funzione più esterna $(t^{-1/4})$
 $\frac{1}{\sqrt[4]{t}}$

$$\text{dom } f = \{x : \log_3(\log_4(x^2-5)) > 0\}$$

questa quantità deve esistere ed essere > 0

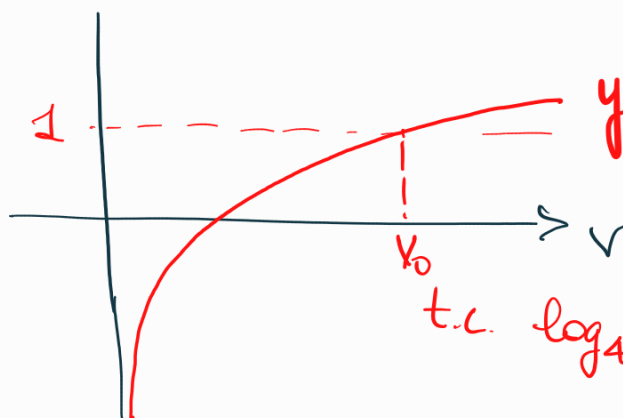
$$\log_3(s) > 0 \iff s > 1$$



$$y = \log_3 s$$

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : \log_4(x^2-5) > 1\}$$

$$\log_4 v > 1 \iff v > 4 \iff x^2 - 5 > 4$$



$$y = \log_4 v$$

$$\text{t.c. } \log_4 v_0 = 1 \iff v_0 = 4$$

$$\text{dom } f = \{x : x^2 - 5 > 4\} = \{x \in \mathbb{R} : (x < -3) \vee (x > 3)\} = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$$

OSS Se fossimo partiti dalla f. interna, avremmo dovuto studiare la diseg^{ne} $x^2 - 5 > 0$, che in realtà è superata da una diseg^{ne} più restrittiva
per esempio

Dominio di $f(x) = \log_{1/2} x + \log_{1/2}(|x| - 1)$

Bisogna imporre

$$\begin{cases} (1^\circ \log) & x > 0 \\ (2^\circ \log) & |x| > 1 \Leftrightarrow (x < -1) \vee (x > 1) \end{cases}$$

$$\text{dom } f = (1, +\infty)$$

OSS Sarebbe errato, prima di calcolare il dominio,

Scrivere $f(x) = \log_{1/2}(\underbrace{x(|x| - 1)})$

perché il dominio di questa nuova funzione è diversa

Se fosse richiesto di calcolare il dominio di $\log_{1/2}(x(|x| - 1))$

esso sarebbe $\left\{ x : \underbrace{\begin{cases} x > 0 \\ |x| - 1 > 0 \end{cases}}_{x > 1} \vee \underbrace{\begin{cases} x < 0 \\ |x| - 1 < 0 \end{cases}}_{-1 < x < 0} \right\}$

dominio di $f(x) = \frac{x^2}{x} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \neq \text{dominio di } x$

Quindi, se devo studiare

$$f(x) = \log_{1/2} x + \log_{1/2} (|x| - 1)$$

trovo il dominio = $(1, +\infty)$ e

poi scrivo che $f(x) = \log_{1/2} (x \underset{\substack{|| \\ \times}}{|x| - 1}) = \log_{1/2} (x^2 - x)$

$$\delta = \min \{ \sqrt{16 + \varepsilon} - 4, 4 - \sqrt{16 - \varepsilon} \}$$
