

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \left(\frac{0}{0} \right) = -\frac{1}{2}$$

(1)

$$\underbrace{\frac{\sin x}{x^3}}_{\substack{\parallel \\ \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x^2} \\ \downarrow \\ +\infty}} - \underbrace{\frac{\operatorname{tg} x}{x^3}}_{\substack{\parallel \\ \frac{\operatorname{tg} x}{x} \cdot \frac{1}{x^2} \\ \downarrow \\ +\infty}} = +\infty - \infty$$

Non funziona
"spezzare" la frazione

Non basta neanche usare cose come sono i limiti notevoli:

$$\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \frac{\cancel{x} + o(x) - \cancel{x} + o(x)}{x^3} = \frac{o(x)}{x^3}$$

questo
non fare
qualcosa
cosa

$\sin x = x + o(x)$
 $\operatorname{tg} x = x + o(x)$

per $x \rightarrow 0$
 per $x \rightarrow 0$

Come si risolve?

$$\begin{aligned} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} &= \frac{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^3} = \frac{\sin x \left(1 - \frac{1}{\cos x} \right)}{x^3} = \\ &= \frac{\overset{\sim x}{\sin x} \overset{\sim -\frac{x^2}{2}}{(\cos x - 1)}}{x^3 \underbrace{\cos x}_{\downarrow 1}} \sim \frac{-\frac{x^3}{2}}{x^3} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$x \rightarrow 0$

N.B. Ci sono ancora dei limiti che non sappiamo calcolare, ma sapremo calcolare usando L'Hôpital e Taylor.

Per esempio $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \left(= \frac{1}{6} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^{\tan x} - 1}{x^3} \stackrel{\sim -\frac{x^3}{2}}{=} \left(\frac{0}{0} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$(\cos x)^{\tan x} - 1 = e^{\underbrace{\tan x \log(\cos x)}_{\downarrow 0}} - 1 \sim \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{oss } e^t - 1 \sim t \\ t = \tan x \log(\cos x) \rightarrow 0 \end{array} \right] \text{ per } t \rightarrow 0$$

$$\sim \underbrace{\tan x}_x \log(\cos x) \sim x \log(\underbrace{\cos x}_{\downarrow 1}) =$$

$$= x \log(1 + \underbrace{(\cos x - 1)}_{\downarrow 0}) \sim$$

oss $\log(1+t) \sim t$ per $t \rightarrow 0$
 inoltre $\cos x - 1 \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow 0$,
 quindi posso metterlo al posto di t .

$$\sim x \underbrace{(\cos x - 1)}_{\sim -\frac{x^2}{2}} \sim -\frac{x^3}{2}$$

Confronto di infiniti / infinitesimi.

- "Ordinare" i seguenti infiniti per $x \rightarrow -\infty$.

$$f(x) = \sqrt{1+x^4}, \quad g(x) = |x|^\pi = (-x)^\pi$$

per $x < 0$

$$h(x) = 2^{\sqrt{-x}}$$

$$k(x) = x^2 \log_2(x^2)$$

Cominciamo a confrontare f e g .

$$\boxed{x \rightarrow -\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{(-x)^\pi} = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t = -x \rightarrow +\infty}} \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^\pi} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^4}}}{t^\pi} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^{\pi-2}} = 0$$

$\Rightarrow f(x)$ è infinito di ordine inferiore risp. a $g(x)$
per $x \rightarrow -\infty$. $f(x) \prec g(x)$

Confronto tra $f(x)$ e $k(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2 \log_2(x^2)} = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t = -x \rightarrow +\infty}} \frac{\sqrt{t^4+1}}{t^2 \log_2(t^2)} = 0$$

$$f(x) \prec k(x)$$

Confronto $f(x)$ e $k(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{k(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|^\pi}{x^2 \log_2(x^2)} = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t = -x \rightarrow +\infty}} \frac{t^\pi}{t^2 \log_2(t^2)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{\pi-2}}{2 \log_2(t)} = +\infty \quad (\text{gerarchia degli } \infty)$$

$$f(x) < k(x) < g(x)$$

Confrontiamo $h(x)$ e $g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|^\pi}{2^{\sqrt{-x}}} = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t = -x \rightarrow +\infty}} \frac{t^\pi}{2^{\sqrt{t}}} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{t})^{2\pi}}{2^{\sqrt{t}}} = \lim_{\substack{s \rightarrow +\infty \\ \sqrt{t} = s \rightarrow +\infty}} \frac{s^{2\pi}}{2^s} = 0 \quad (\text{gerarchia degli } \infty)$$

oppure

$$\frac{t^\pi}{2^{\sqrt{t}}} = \frac{2^{\pi \log_2 t}}{2^{\sqrt{t}}} = 2^{\underbrace{\pi \log_2 t - \sqrt{t}}_{\downarrow -\infty}} \rightarrow 2^{-\infty} = 0$$

Quindi, in definitiva

$$f(x) < k(x) < g(x) < h(x)$$

Esercizio: ordinare in ordine crescente di infinitesimo, per $x \rightarrow 0^+$, le seguenti funzioni:

$$f(x) = x \log_2 x \rightarrow 0,$$

$$g(x) = - \frac{x^{1/3}}{\log_3 x} \rightarrow 0$$

$$h(x) = x^{-10} 2^{-1/x}$$

$$k(x) = \sin x \sim x$$

$x \rightarrow 0^+$

$$t^{10} 2^{-t} = \frac{t^{10}}{2^t} \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{x} = t \rightarrow +\infty$$

Confronto tra f e k

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{k(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log_2 x}{x} = -\infty$$

$\Rightarrow k(x)$ è infinitesimo di ordine superiore risp. a $f(x)$
cioè $k(x) = o(f(x))$ per $x \rightarrow 0^+$

Confronto tra g e k .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{k(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(- \frac{x^{1/3}}{x \log_3 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(- \frac{1}{x^{2/3} \log_3 x} \right) = +\infty$$

$\downarrow$
 0^-

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log_b x = 0 \quad \forall \alpha > 0 \quad \text{limite notevole}}$$

$\Rightarrow k(x)$ è infinitesimo di ordine superiore risp. a $g(x)$
per $\boxed{x \rightarrow 0^+}$

Confronto di f e g

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log_2 x \log_3 x}{-x^{1/3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{x^{2/3} \log_2 x \log_3 x}_{(x^{1/3} \log_2 x)(x^{1/3} \log_3 x)} = 0$$

In ordine crescente di infinitesimo.

$$g(x), f(x), k(x)$$

e $h(x)$?

Confronto $h(x)$ e $k(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{k(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-10} 2^{-1/x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-11} 2^{-1/x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{11} \cancel{2^{-t}}}{2^t} \rightarrow 0$$

$t = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$

$h(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore risp. a $k(x)$
 Quindi, conclusione: in ordine crescente di infinitesimo:

$$g(x), f(x), k(x), h(x)$$

$$h(x) = o(k(x)), \quad k(x) = o(f(x)) \quad \text{etc}$$

$$\underbrace{g(x) + f(x) + k(x) + h(x)} \sim g(x) \quad x \rightarrow 0^+$$

$$g(x) \left[1 + \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{k(x)}{g(x)}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{h(x)}{g(x)}}_{\downarrow 0} \right] \sim g(x)$$

Ordine di infiniti e infinitesimi.

Vogliamo scegliere degli infiniti/esimi "campione"
in varie situazioni ($x_0 \in \mathbb{R}$)

	$x \rightarrow +\infty$	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow x_0^+$	$x \rightarrow x_0^-$
infinito	x	$-x$	$\frac{1}{x-x_0}$	$\frac{1}{x_0-x}$
infinitesimo	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x}$	$x-x_0$	x_0-x

DEF Diremo che $f(x)$ è infinito/infinitesimo di ordine $\alpha > 0$ per $x \rightarrow +\infty$, per $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$ se $f(x) \sim l (g(x))^\alpha$ per $x \rightarrow +\infty, -\infty, x_0^+, x_0^-$ dove $g(x)$ è l'infinito/esimo corrispondente nella tabella e $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Esempio • $1 - \cos x$ è un infinitesimo di ordine 2 per $x \rightarrow 0^\pm$

Infatti $1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$ per $x \rightarrow 0^\pm$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

• se x è infinitesimo di ordine 1 per $x \rightarrow 0^+$

se $x \sim x$ per $x \rightarrow 0^+$

• $\frac{1}{x^2+5}$ è un infinitesimo di ordine 2 per $x \rightarrow +\infty$
e per $x \rightarrow -\infty$

$$\frac{1}{x^2+5} \sim \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$x \rightarrow +\infty$$

- $\underbrace{3x^4 - 2x^3 + 5}$ è un infinito di ordine 4 per $x \rightarrow +\infty$
 $x \rightarrow -\infty$
 $\sim 3x^4$

- $\frac{5}{\sqrt[4]{x+7}}$ è un infinitesimo di ordine $\frac{1}{4}$ $x \rightarrow +\infty$

- $\log x$ è un infinitesimo di ordine 1 per $x \rightarrow 1^\pm$

$$\log x \sim x-1 \quad x \rightarrow 1^\pm$$

$$\log(1 + \underbrace{(x-1)}_{\downarrow 0}) \sim x-1$$

N.B. Ci sono infiniti/infinitesimi che non hanno ordine

- $f(x) = e^x$ $x \rightarrow +\infty$

e^x è ^{infinito} di ordine superiore risp. a $x^\alpha \quad \forall \alpha > 0$.

- $f(x) = \log x$ $x \rightarrow +\infty$

è infinito di ordine inferiore risp. a $x^\alpha \quad \forall \alpha > 0$

- $f(x) = x \log x$ $x \rightarrow +\infty$

è infinito di ordine superiore rispetto a x
 ma inferiore a $x^\alpha \quad \forall \alpha > 1$

- $f(x) = \frac{x^2}{\log x}$ $x \rightarrow +\infty$

è infinito di ordine inferiore risp a x^2 .
ma superiore risp. a $x^\alpha \quad \forall \alpha \in (0, 2)$