Def $f(x), g(x)$ t.c. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$

$x_0 \in \mathbb{R}^*$

f è un <u>infinito di ordine superiore</u> risp a g per $x \to$

se $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ $\left(\text{cioè } \lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty\right)$

$$\left(g(x) = o\left(f(x)\right) \text{ per } x \to x_0\right)$$

Supponiamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.

$\boxed{\to x_0}$

Diremo che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore risp. a $g(x)$ per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad \left(\text{cioè } \lim_{x \to x_0} \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| = +\infty \right)$$

OSS

$\boxed{x \to x_0}$

OSS

f infinito di ord. sup. risp. a $g(x) \iff g(x) = o(f(x))$

f infinitesimo " " " " " $\iff f(x) = o(g(x))$

---

f e g sono infiniti/infinitesimi dello stesso ordine se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ cioè } f(x) \sim l\, g(x) \text{ per } x \to x_0$$

per $x \to x_0$

Esempi

x^2 è infinito di ordine inferiore risp. a x^3 per $x \to -\infty$

x^2 è infinitesimo di ordine inferiore risp a x^3 per $x \to 0$

Però:

$$x^2 + x^3 \sim x^3 \qquad \text{per } x \to -\infty$$

$$\| $$

$$x^3\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$x^2 + x^3 \sim x^2 \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\| $$

$$x^2(1+x) = x^2(1+o(1))$$

In generale, se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$,

si ha $f(x) + g(x) \sim g(x)$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$g(x)\left(1 + \frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$$

1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{b^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \forall b > 1$

$\forall \alpha > 0 \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$

cioè: b^x è infinito di ord. sup. risp. a x^α $\forall \alpha > 0, \forall b > 1$

(già visto) per $x \to +\infty$.

2) $\lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha b^x = 0 \quad \forall b > 1, \ \forall \alpha > 0 \ (\forall \alpha \in \mathbb{R})$

Cioè b^x è un infinitesimo di ordine superiore risp. a $\frac{1}{|x|^\alpha}$

per $x \to -\infty$, $\forall b > 1, \forall \alpha > 0$

3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} = 0, \quad \forall b>0,\ b \neq 1,\ \forall \alpha > 0$ ($\forall \alpha \in \mathbb{R}$)

cioè $\log_b x$ è un infinito di ordine inferiore risp. a x^α $\forall b>0,\ b\neq 1,\ \forall \alpha > 0$

Infatti abbiamo verificato che, se $a_n \to +\infty$, allora

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log_b a_n}{a_n^\alpha} = 0 \qquad + \text{teor. ponte}$$

4) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha} \log_b x = (0 \cdot (\pm\infty)) = 0 \qquad \forall b > 0, b \neq 1$
$\forall \alpha > 0$

Cioè $\log_b x$ è un infinito di ordine inferiore risp. a $\frac{1}{x^\alpha}$
$\forall \alpha > 0$

Dim $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha} \log_b x = \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{y^\alpha} \underbrace{\log_b \frac{1}{y}}_{= -\log_b y} = \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{-\log_b y}{y^\alpha} = 0$

$y = \frac{1}{x} \to +\infty$

(3)

4') $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}|\log_b x|^c = 0 \quad \forall b>0, b\neq 1, \forall \alpha>0$
$\forall c>0$

Dim

$$x^{\alpha}|\log_b x|^c = \Big(\underbrace{x^{\frac{\alpha}{c}}|\log_b x|}_{\to 0}\Big)^c \longrightarrow 0^c = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = \left(0^{+\infty}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{x} = \left(0^{0}\right) = \lim_{x\to 0^+} e^{\underbrace{x\log x}_{\to 0}} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^{\sqrt{\log x}}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty} e^{\underbrace{\log x - \sqrt{\log x}}_{=\,(\log x)\left(1-\frac{1}{\sqrt{\log x}}\right)\,\to\,+\infty}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\underbrace{\sqrt{\log x}}_{\to\,0}$$

Limiti notevoli:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1}$$

Si può scrivere anche così

$$\sin x = x\,(1+o(1)) \qquad \text{per } x\to 0$$

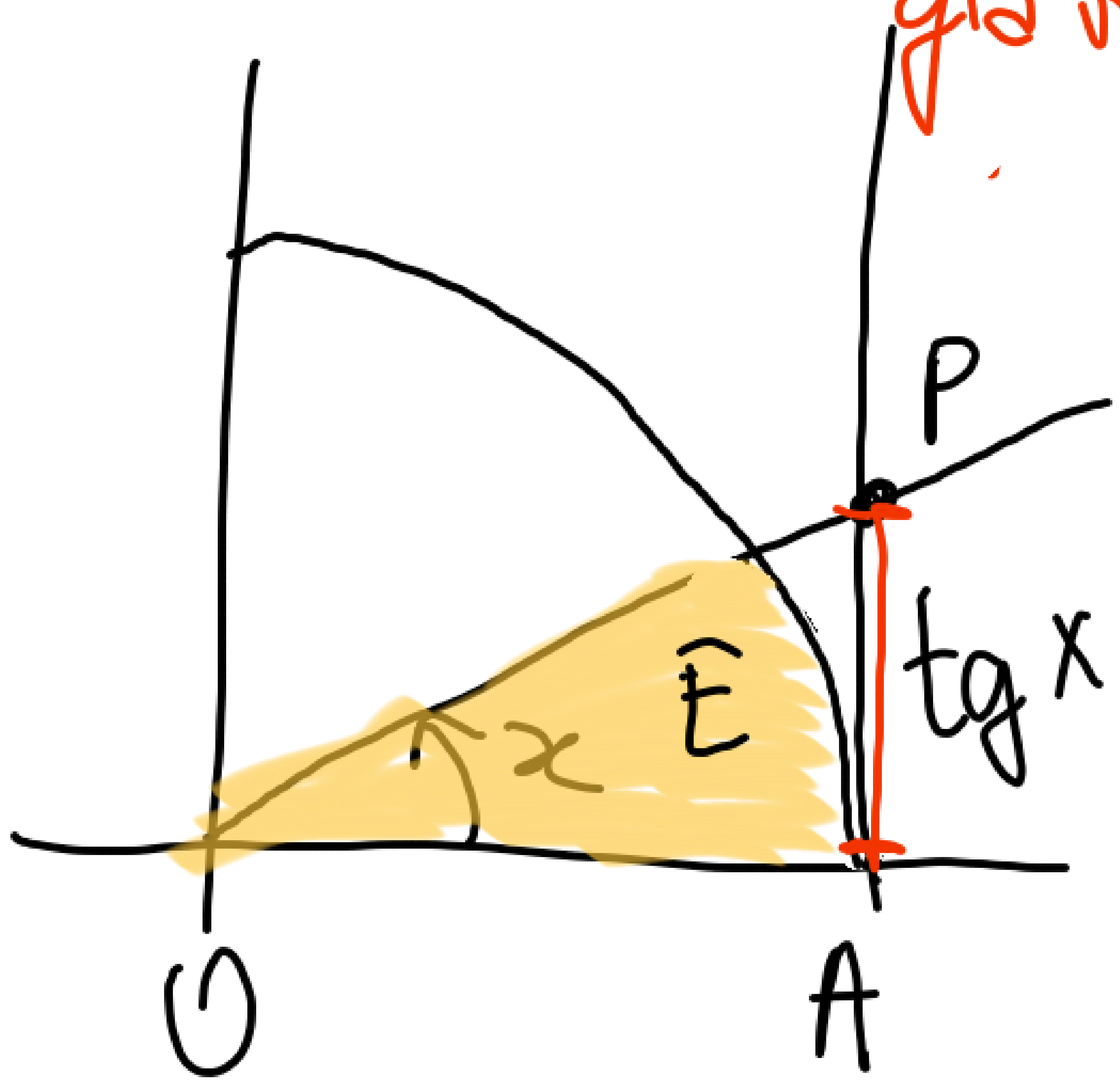
$$\sin x \sim x$$

$$\sin x = x + \underbrace{x\;o(1)}_{=\,o(x)} = x + o(x)$$

Lemma $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$$

già visto



$$\text{area } \overset{\triangle}{OAP} = \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

$$\frac{\text{Area } E}{x} = \frac{\pi}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \text{Area } E = \frac{x}{2}$$

$$\text{area } E \leq \text{area } \overset{\triangle}{OAP}$$

$$\frac{x}{2} \leq \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

$$x \leq \operatorname{tg} x$$

$$\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \underbrace{\cos x}_{1} \xRightarrow{\text{carab}} \frac{\sin x}{x} \to 1 \text{ per } x \to 0^+$$

ma $\frac{\sin x}{x}$ è pari, quindi anche $\frac{\sin x}{x} \to$ per $x \to 0^-$

$\square$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\cancel{\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}}$

Si scrive anche

$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$

$1-\cos x = \frac{x^2}{2}(1+o(1))$ "

$1-\cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ "

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ "

$x \to 0$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{\overbrace{(1-\cos x)(1+\cos x)}^{1-\cos^2 x = \sin^2 x}}{x^2\,(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x^2\,(1+\cos x)} \to$$

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \to 1, \qquad 1+\cos x \to 2$$

$$\to \frac{1}{2}.$$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow \atop 1} \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\downarrow \atop 1} \rightarrow 1$$

$\operatorname{tg} x \sim x$ per $x \to 0$

$\operatorname{tg} x = x + o(x)$ per $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = -2$$

$$\underbrace{\frac{x^2}{(\cos x - 1)}}_{\to\, -2} \; \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to\, 1}$$

$$\frac{x \overbrace{\sin x}^{\sim x}}{\underbrace{\cos x - 1}_{\sim -\frac{x^2}{2}}} \sim \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = -2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin^2 x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$$

$$\|$$

$$\underset{\to 1}{\frac{\operatorname{tg} x}{x}} - \underset{\to 1}{\frac{\sin x}{x}} \underset{\to 0}{\sin x} \longrightarrow 1$$

$$\overbrace{\operatorname{tg} x}^{\sim x} - \overbrace{\sin^2 x}^{\sim x^2} = x \underbrace{\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} - \frac{\sin^2 x}{x}\right)}_{= 1 + o(1)} \sim x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos x}{\sin(x^2)-3\sin x - x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\frac{\overbrace{2-2\cos x}^{\sim x^2}}{\underbrace{\sin x^2 - 3\sin x - x^2}_{x\left(\frac{\sin(x^2)}{x^2}x - 3\frac{\sin x}{x} - x\right)}} \sim -3x \qquad \sim \frac{x^2}{-3x} = -\frac{x}{3} \to 0$$

$$\underbrace{\frac{\sin(x^2)}{x^2}x}_{\downarrow\, 0} \qquad \underbrace{3\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow\, -3} \qquad \underbrace{x}_{\downarrow\, 0}$$

Limiti notevoli che coinvolgono e

1) $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Vero, perché se $a_n \to \pm\infty$, $\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$

+ teor. ponte $\Rightarrow$ la tesi