

TEOREMA PONTE

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0, l \in \mathbb{R}^*$, x_0 pto di accum. di X .
Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall \{a_n\} \text{ a valori in } X \setminus \{x_0\} \text{ t.c.} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0 \text{ si ha } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l. \end{array}$$

Dim ($\Rightarrow$) Supponiamo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$. (*)

Sia $\{a_n\}$ una succ^{ne} t.c. $a_n \in X \setminus \{x_0\} \quad \forall n$,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0$. Devo provare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l$

$\forall V$ intorno di l deve essere $f(a_n) \in V$ def^{te}.

Sappiamo, per (*), che per questo intorno V di l

$\exists$ un intorno U di x_0 t.c. $f(x) \in V$
 $\forall x \in X \cap U \setminus \{x_0\}$.

Poiché $a_n \rightarrow x_0$, per questo intorno U di x_0 si avrà def^{te}

$$a_n \in U \cap X \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(a_n) \in V \text{ def^{te} } \quad \square$$

Dim ($\Leftarrow$) Supponiamo che $\forall \{a_n\}$ a valori in $X \setminus \{x_0\}$

verificante $a_n \rightarrow x_0$ si ha $f(a_n) \rightarrow l$.

Dobbiamo provare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Supponiamo per assurdo che non sia vero:

$$\neg \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \right)$$

↑
negazione

$$\neg \left(\forall V \text{ intorno di } l \quad \exists U \text{ intorno di } x_0 \text{ t.c.} \right. \\ \left. f(x) \in V \quad \forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\} \right)$$

cioè $\exists V$ intorno di l t.c. $\forall U$ intorno di x_0

$$\exists x \in U \cap X \setminus \{x_0\} \text{ t.c. } f(x) \notin V$$

Da questo momento V è fissato. Supponiamo per semplicità $x_0 \in \mathbb{R}$ (lascio per esercizio il caso $x_0 = \pm\infty$)

$$\text{Fissato } U_1 = (x_0 - 1, x_0 + 1)$$

$$\exists a_1 \in U_1 \cap X \setminus \{x_0\} \text{ t.c. } f(a_1) \notin V.$$

$$\text{Fisso } U_2 = (x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}) \Rightarrow$$

$$\exists a_2 \in U_2 \cap X \setminus \{x_0\} \text{ t.c. } f(a_2) \notin V.$$

$\vdots$

$$\text{Fisso } U_n = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \Rightarrow$$

$$\exists a_n \in U_n \cap X \setminus \{x_0\} \text{ t.c. } f(a_n) \notin V.$$

Costruisco così una succ^{te} $\{a_n\}$.

$$a_n \in X \setminus \{x_0\} \quad a_n \in U_n \Leftrightarrow$$

$$x_0 - \frac{1}{n} < a_n < x_0 + \frac{1}{n} \Rightarrow a_n \rightarrow x_0$$

ipotesi
 $\Rightarrow$

$$f(a_n) \rightarrow l.$$

sono in contraddizione

Ma io ho trovato un intorno V di l t.c. $f(a_n) \notin V$
 $\forall n$
 $\square$

Limiti di funzioni elementari

Potenze

$$f(x) = x^\alpha$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ (quindi $x > 0$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

Dim ($\alpha > 0$) sia $a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow a_n^\alpha \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$ lim. parte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha < 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0^+ & \alpha > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \quad \forall x_0 \in (0, +\infty)$$

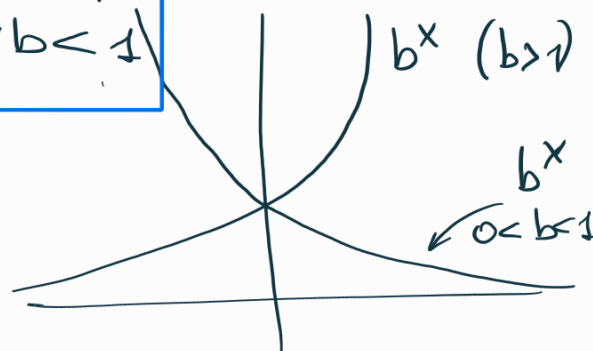
Limiti di esponenziali

$$f(x) = b^x \text{ con } b > 0, x \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 1 \\ 1 & b = 1 \\ 0^+ & 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} b^x = \begin{cases} 0^+ & \text{se } b > 1 \\ 1 & b = 1 \\ +\infty & 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}} b^x = b^{x_0}$$



Limiti di logaritmi

$$x \in (0, +\infty)$$

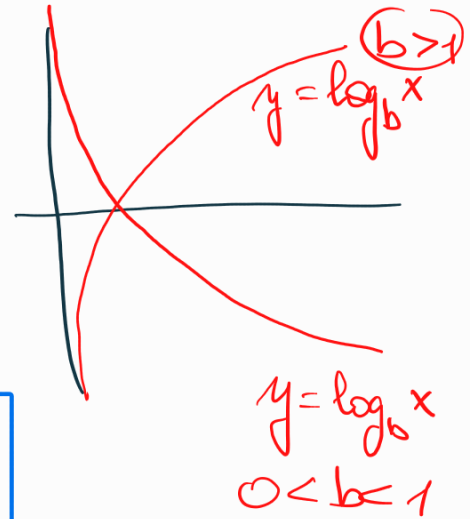
$$f(x) = \log_b x$$

$$(b > 0, b \neq 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_b x = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$$

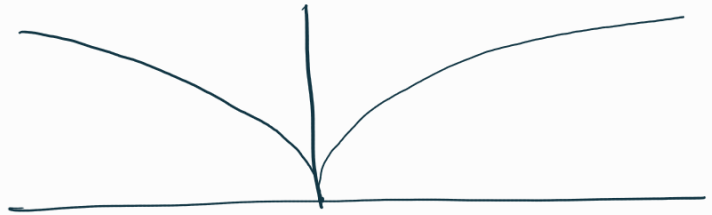
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_b x = \begin{cases} -\infty & \text{se } b > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_b x = \log_b x_0 \quad \forall x_0 \in (0, +\infty)$$



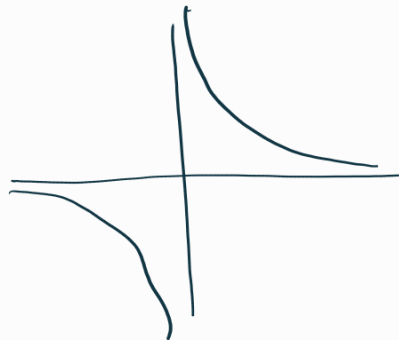
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{4/5} = +\infty$$

" $\sqrt[5]{x^4}$



$$\lim_{x \rightarrow -3} x^{4/5} = (-3)^{4/5} = 3^{4/5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{-3/5} = 0^-$$



Limiti di funzioni trigonometriche.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$$

$$\sin x$$

~~A~~

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$$

$$\cos x$$

~~A~~

} già visto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

(Provalo ieri)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

(Proviamolo)

$$0 \leq |\sin x - \sin x_0| = (*)$$

[Formule di Prosthferesi]

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2}$$

$$(*) = 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x+x_0}{2} \right| \leq$$

$$\wedge \frac{|x-x_0|}{2}$$

$$\left[|\sin t| \leq |t| \quad \forall t \in \mathbb{R} \right]$$

$$\leq \cancel{2} \frac{|x-x_0|}{\cancel{2}} \left| \cos \frac{x+x_0}{2} \right| \leq |x-x_0|$$

$$\wedge 1$$

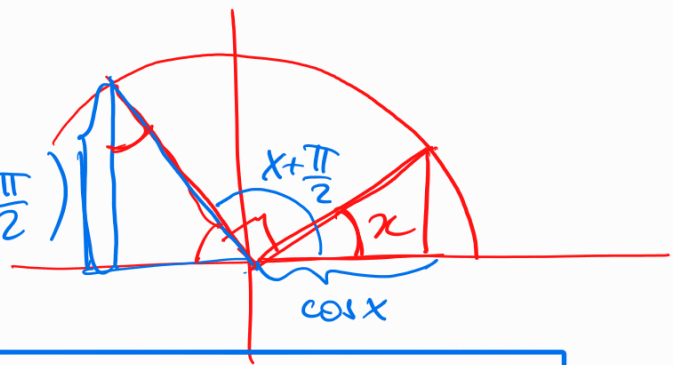
↓ per $x \rightarrow x_0$
0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \lim_{x \rightarrow x_0} \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(x_0 + \frac{\pi}{2} \right) = \cos x_0$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \operatorname{tg} x_0$$

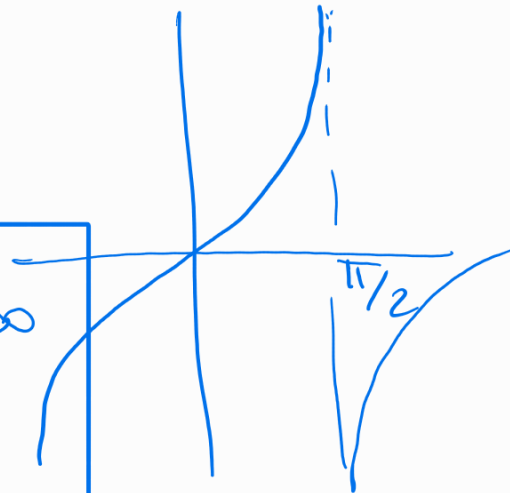
$$\forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty$$

$\uparrow 1$
 $\downarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x^3 \sin x}}{x} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

N.B se $x \rightarrow +\infty$

$$x^2 + x^3 = x^3 \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \sim x^3$$

se $x \rightarrow 0$

$$x^2 + x^3 = x^2 (1 + x) \sim x^2$$

$$\sqrt{x^2 + 2x^3 \sin x} = \sqrt{x^2(1 + 2x \sin x)} =$$

$$x \rightarrow 0$$

$$= \underbrace{\sqrt{x^2}}_{\substack{\downarrow \\ |x|}} \underbrace{\sqrt{1 + 2x \sin x}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \sim |x|$$

per $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x^3 \sin x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \quad \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0} e^y = 1.$$

per $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$

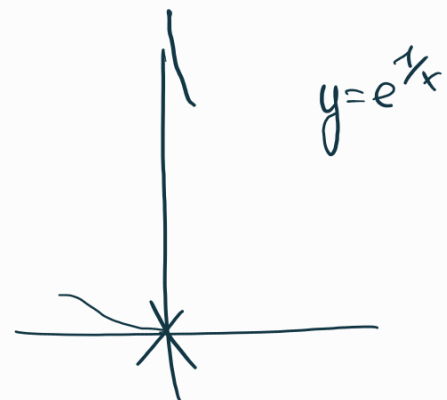
$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$$

se $x \rightarrow 0^+$, $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0^+$$

se $x \rightarrow 0^-$, $y = \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x^4 - 3x^3}{x^3 \log(1+e^{2x})} \right) \right| = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}} |\operatorname{tg} y| = +\infty$$

$$\frac{\pi x^4 - 3x^3}{x^3 \log(1+e^{2x})} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) \sim \frac{\pi x^4}{2x^4} = \frac{\pi}{2}$$

$$N: \pi x^4 - 3x^3 = x^4 \left(\pi - \frac{3}{x} \right) \sim \pi x^4 \quad x \rightarrow +\infty$$

$$D: \log(1+e^{2x}) = \log(e^{2x} \left(\frac{1}{e^{2x}} + 1 \right)) =$$

$$= \underbrace{\log e^{2x}}_{\substack{\text{"} \\ 2x \rightarrow +\infty}} + \underbrace{\log \left(1 + \frac{1}{e^{2x}} \right)}_{\downarrow 0} =$$

$$= 2x + o(1) = 2x \left(1 + \underbrace{\frac{o(1)}{2x}}_{\substack{\text{"} \\ o(1)}} \right) \sim 2x$$

$$x^3 \log(1+e^{2x}) \sim x^3 2x = 2x^4$$

CONFRONTO tra infiniti

questo è banale se $\alpha \leq 0$

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{b^x} = 0 \quad \forall b > 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

dim con il teor. ponte:
sia $a_n \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^\alpha}{b^{a_n}} = 0$$

già visto per le succ.^m
□

Riguardiamolo: $f(x) = x^\alpha$

per $\alpha > 0$ è un infinito
quando $x \rightarrow +\infty$

$g(x) = b^x$ ($b > 1$) è un infinito quando $x \rightarrow +\infty$

Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{b^x} = 0$, diremo che

b^x è un infinito di ordine superiore risp. a x^α

DEF Date due funzioni $f(x), g(x)$ t.c. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$,

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$, diremo che

$f(x)$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ se.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \text{ ossia } \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$$

Esempio: Per $x \rightarrow 0^+$

$\frac{1}{x^2}$ e $\frac{1}{x^3}$ sono infiniti.
 $\overset{g(x)}{\underset{g(x)}{\frac{1}{x^2}}}$ $\overset{f(x)}{\underset{f(x)}{\frac{1}{x^3}}}$

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^3}} = \frac{x^3}{x^2} = x \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 0^+$$

per $x \rightarrow 0^+$ $\frac{1}{x^3}$ è infinito di ordine superiore rispetto a $\frac{1}{x^2}$

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

Notazione con gli $o(\cdot)$

$o(1)$

DEF Siano $f(x), g(x)$ defte $\neq 0$ per $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}^*$

Scriveremo $g(x) = o(f(x))$ per $x \rightarrow x_0$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \quad \left(\text{cioè } \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty \right)$$

In particolare, se $f \equiv 1$.

dire $g(x) = o(1)$ per $x \rightarrow x_0$ significa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

Esempi

$$x = o(x^2)$$

per $x \rightarrow \pm\infty$

$$\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

per $x \rightarrow +\infty$

ma $x^2 = o(x)$

per $x \rightarrow 0$

OSS se $f(x) = o(g(x))$

per $x \rightarrow x_0$

$$f(x) + g(x) \sim g(x)$$

per $x \rightarrow x_0$

$$f(x) + g(x) = g(x) \left(\frac{f(x)}{g(x)} + 1 \right) \sim g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{|x|^\alpha}_{\downarrow +\infty} \underbrace{b^x}_{\downarrow 0} = (+\infty \cdot 0) =$$

$\alpha > 0$
 $b > 1$

Proviamo $-x = y \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} |y|^\alpha b^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{|y|^\alpha}{b^y} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x ^\alpha b^x = 0$	$\forall \alpha > 0$ $\forall b > 1$	$(\forall \alpha \in \mathbb{R})$
---	---	-----------------------------------