

$$x^q = x^{\frac{+m}{n}} =$$

$m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0,$
 m, n primi tra loro

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

$$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{m/n}}$$

x^a con $x > 0$, a irrazionale.

$$a^\pi$$

$$\pi = 3,1415926 \dots$$

$$\boxed{a > 1}$$

$$a^3$$

$$a^{3,1} = a^{\frac{31}{10}}$$

$$a^{3,14} = a^{\frac{314}{100}} = a^{\frac{157}{50}}$$

e così via.

La succ^{ne} così generata è crescente ($a > 1$) e limitata super.

→ Questa successione converge a un numero, che chiamiamo a^π .

$$0 < a < 1$$

$$a^3$$

$$a^{3,1}$$

$$a^{3,14}$$

$$a^{3,141}$$

La succ^{ne} è decrescente e limitata inferiormente
 → converge a un numero che chiamiamo a^π .

$$1^\pi = 1$$

$$0^n = 0$$

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

$$a > 0$$

a^r con $a < 0$ e r irrazionale non è definito.

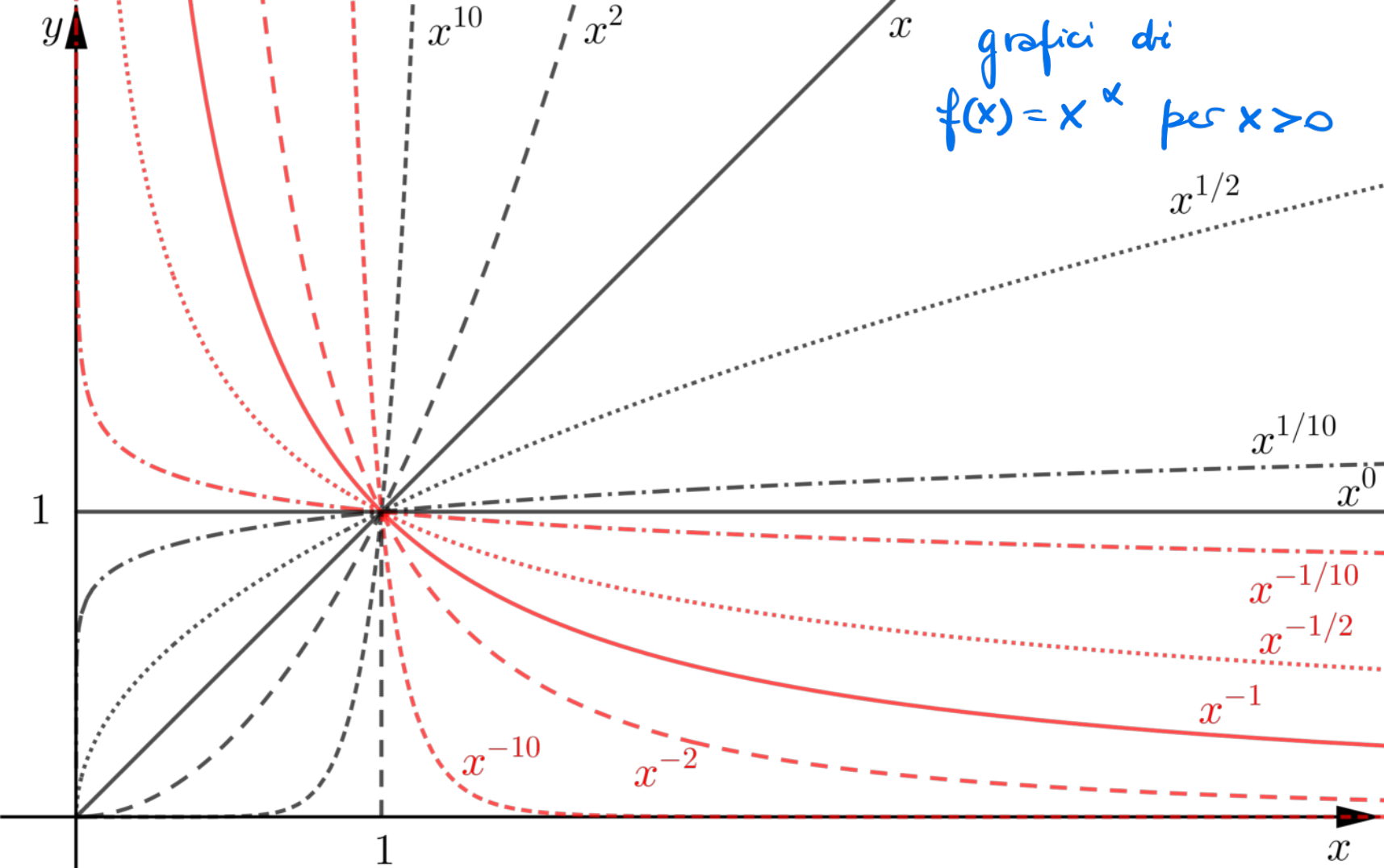
Per le potenze così definite (anche con esponente irrazion.) continuano a valere le proprietà viste ieri, per es

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\forall a > 0, \forall r, s \in \mathbb{R}$$

$$a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$$

$$\forall a, b > 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$



N.B. $\sqrt[3]{x^3} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\sqrt[4]{x^4} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+1/x^2)}}{x} =$$

~~$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \sqrt{1+1/x^2}}{x} = 1$$~~ ERRATO

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1+1/x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1+1/x^2}}{x} = -1$$

$|x| = -x$
quando $x \rightarrow -\infty$

CORRETTO!

Equazioni e disequazioni irrazionali

↪ che coinvolgono radici.

• Se compaiono radici dispari, le cose sono più facili.

$$\sqrt[3]{x^3-5} > x-1$$

N.B.

$$a = b \iff a^3 = b^3$$

$$a > b \iff a^3 > b^3$$

$$\sqrt[3]{x^3-5} > x-1 \iff x^3-5 > (x-1)^3$$

$$\iff \cancel{x^3}-5 > \cancel{x^3}-3x^2+3x-1$$

$$\iff 3x^2-3x-4 > 0 \iff$$

$$\left[x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+48}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{6} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{57}}{6} \right]$$

$$\iff \left(x < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{57}}{6} \right) \vee \left(x > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{57}}{6} \right)$$

Una simile diseg^{he} può capitare in un esercizio come:

Trovare il dominio di $f(x) = \log(\sqrt[3]{x^3-5} - x + 1)$

Le cose sono più delicate se compaiono radici pari:

$$\sqrt[n]{P(x)} \geq Q(x) \quad \boxed{n \text{ pari}} \quad P(x), Q(x) \text{ sono polinomi.}$$

Ci sono due problemi:

1) $\sqrt[n]{t}$ non è definito per $t < 0$.

2) $f(t) = t^n$ non è crescente in $\mathbb{R}$

è ~~strett.~~ crescente in $[0, +\infty)$

è strett. decrescente in $(-\infty, 0]$

$$a = b \implies a^2 = b^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{è una doppia implicazione} \\ \text{solo se } a, b \geq 0. \end{array} \right)$$

$$a > b \not\implies a^2 > b^2, \text{ ma}$$

$$a > b \geq 0 \implies a^2 > b^2$$

$$\sqrt{x^2+4} = 2x \quad \Rightarrow \quad x^2+4 = 4x^2$$

~~$\Leftarrow$~~

quadrando si potrebbero aggiungere soluzioni.

^{no}

$$\sqrt{x^2+4} = 2x$$

Sol^u: $x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{cases} \cancel{x^2+4 \geq 0} \text{ sempre vero} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+4 = 4x^2 \Leftrightarrow 3x^2=4 \Leftrightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

solo quella con il più
è accettabile