

TEOREMA PONTE

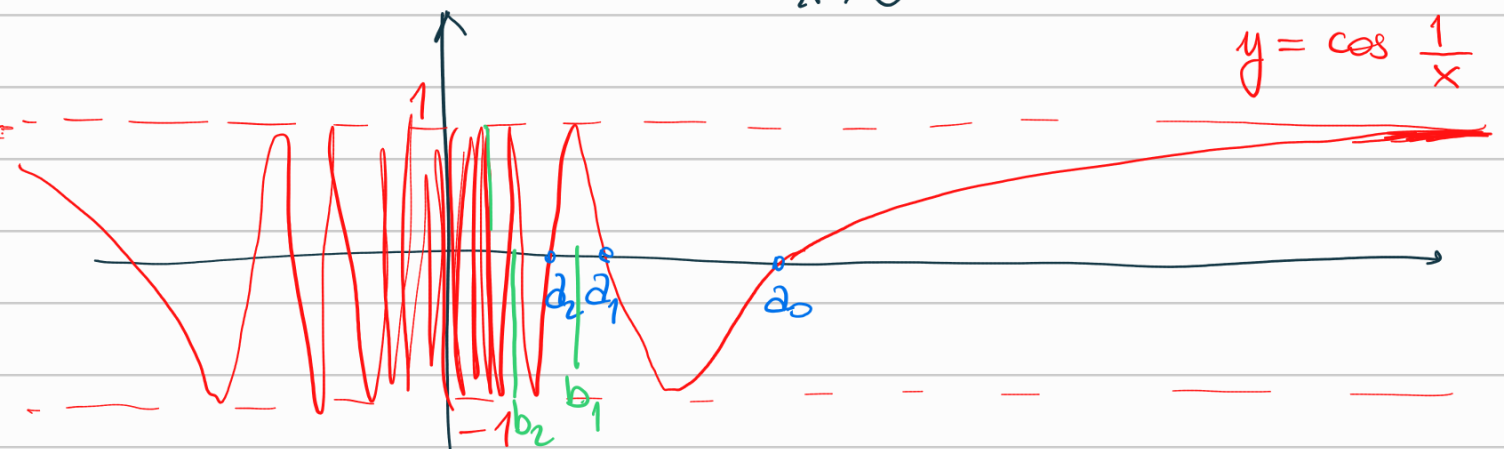
Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ pto di accumul^{ne} di X
 $l \in \mathbb{R}^*$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall \text{ succ}^{\text{ne}} \{a_n\} \text{ di valori in } X \setminus \{x_0\} \\ \text{t.c. } a_n \rightarrow x_0 \text{ si ha } f(a_n) \rightarrow l.$$

Si può usare per dim. che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste

Basta trovare due succⁿⁱ a_n, b_n di valori in $X \setminus \{x_0\}$
t.c. $a_n \rightarrow x_0, b_n \rightarrow x_0$ ma $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n)$

Voglio provare che $\nexists \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x}$



Per il teor. ponte, per dim. che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x} \nexists$,
devo trovare due succⁿⁱ $\{a_n\}, \{b_n\}$ t.c. $a_n \rightarrow 0^+, b_n \rightarrow 0^+$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{a_n} \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{b_n}$$

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi} \rightarrow 0^+$$

$$f(a_n) = \cos \frac{1}{a_n} = \cos \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right) = 0 \xrightarrow{n} 0$$

$$\frac{1}{b_n} = 2n\pi \Rightarrow b_n = \frac{1}{2n\pi} \longrightarrow 0^+ \\ (n=1,2,\dots)$$

$$f(b_n) = \cos \frac{1}{b_n} = \cos(2n\pi) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Proprietà dei limiti di funzioni. (dim. simili a quelli di successione)

TEOREMA (unicità del limite)

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, se esiste, è unico

TEOREMA (permanenza del segno).

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in (0, +\infty]$, allora
 $f(x) > 0$ def^{te} per $x \rightarrow x_0$.

(dim. basta considerare un intorno U di l fatto di numeri positivi).

Equivalentemente:

$$\left. \begin{array}{l} \text{se } f(x) \leq 0 \text{ def}^{\text{te}} \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \end{array} \right| \Rightarrow l \in [-\infty, 0]$$

Generalizzazione

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e se $m < l$, allora $f(x) > m$
 def^{te} per $x \rightarrow x_0$
 se $M > l$, allora $f(x) < M$
 def^{te} per $x \rightarrow x_0$

TEOR. dei CARABINIERI

$f, g, h: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ defte per } x \rightarrow x_0$$

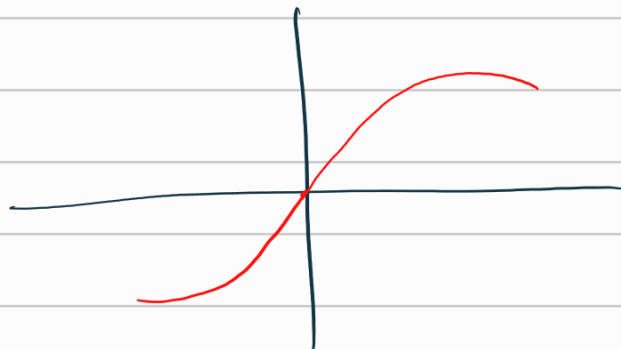
e se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$,

allora $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$.

OSS Se $l = \pm\infty$, di carabinieri ne basta 1.

Uso del teor dei carabinieri: voglio provare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$



$$\underline{\text{OSS}} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - l| = 0$$

$\Rightarrow$ Per mostrare che $\sin x \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$,
basterà provare che $|\sin x| \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$.

$$0 \leq |\sin x| \leq \text{che cosa?}$$

Voglio provare che $|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

oss le funz. $|\sin x|$ e $|x|$ sono pari

$\Rightarrow$ basto provare la dis. per $x \geq 0$. $\Rightarrow$ tolgo il modulo di x

$$|\sin x| \stackrel{?}{\leq} x$$

$$\forall x \geq 0$$

questo è ovvio e $x \geq 1$

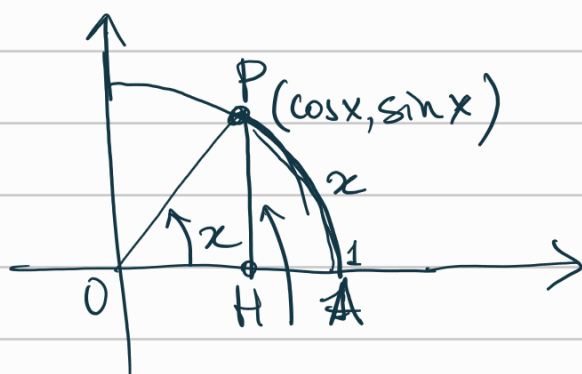
$$|\sin x| \leq x$$

$$\forall x \in [0, 1]$$

ma per $x \in [0, 1]$ $\sin x \geq 0$

$$\sin x \stackrel{?}{\leq} x$$

$$\forall x \in [0, 1]$$



$$\sin x = \overline{PH}$$

x è la lunghezza dell'arco di circonferenza da A a P.

quindi è evidente geometricamente che $\overline{PH} \leq \widehat{AP}$

$$0 \leq |\sin x| \leq |x|$$

$$\Rightarrow |\sin x| \rightarrow 0 \Rightarrow \sin x \rightarrow 0$$

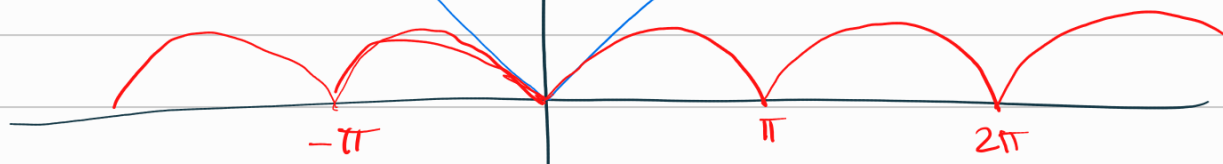
Carab

$$|\sin x| \leq |x|$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$y = |x|$$

$$y = |\sin x|$$



Aritmetica dei limiti

Siano $f, g: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ pto di accum. di X .

Supponiamo anche $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$.

Alors :

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha l + \beta m.$$

(lineare del limite)

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

se prendiamo $\alpha = \beta = 1$, si ottiene il limite della somma

$$\alpha = 1, \beta = -1 \quad \text{differenza}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = lm;$$

3) Se $m \neq 0$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$

Dim. solo 1) usando il teor. ponte. ($\Leftarrow$)

Devo provare che, $\forall$ succ^{ue} $\{a_n\}$ a valori in $X \setminus \{x_0\}$ verificante $a_n \rightarrow x_0$ si ha

$$\alpha f(a_n) + \beta g(a_n) \rightarrow \alpha l + \beta m.$$

Thm. ponte($\Rightarrow$)

Pour ce $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \implies f(x_n) \rightarrow l$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \Rightarrow g(a_n) \rightarrow m.$$

linearità dei limiti di succ

$$\Rightarrow \alpha f(a_n) + \beta g(a_n) \rightarrow \alpha l + \beta m$$

(

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x}{x - x^3 + 1} = \frac{15}{-23} = -\frac{15}{23}$$

$$N \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 3 \Rightarrow 2x \Rightarrow 6 \\ x^2 = x \cdot x \rightarrow 9 \end{array} \right| \Rightarrow x^2 + 2x \rightarrow 9 + 6 = 15$$

$$D \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 3 \\ x^3 = x \cdot x \cdot x \Rightarrow 27 \\ 1 \rightarrow 1 \end{array} \right| \Rightarrow x - x^3 + 1 \rightarrow 3 - 27 + 1 = -23$$

Ora si può estendere (come per le successioni)
l'aritmetica dei limiti a casi non considerati finora.

$$\text{se, per } x \rightarrow x_0, \left. \begin{array}{l} f(x) \rightarrow +\infty \\ g(x) \rightarrow m \in \mathbb{R} \end{array} \right| \Rightarrow f(x) + g(x) \rightarrow +\infty$$

$$" +\infty + m = +\infty "$$

$$" +\infty + \infty = +\infty "$$

$$" -\infty + m = -\infty "$$

$\uparrow$
 $\mathbb{R}$

$$" -\infty + \infty = \text{f.i.} " \quad (\text{si studia caso per caso})$$

Ma in realtà si può generalizzare

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \\ g(x) \text{ limitata inferiorm.} \\ \text{def'ta per } x \rightarrow x_0 \end{array} \right| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{(-x)}_{\downarrow +\infty} \underbrace{(-5 \sin x)}_{\substack{\text{VI} \\ -5}} = +\infty$$

Regole per il prodotto di limiti.

$$" (+\infty) \cdot m = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \text{se } m > 0 & " \\ m < 0 & \end{array}$$

$$" (-\infty) \cdot m = \begin{cases} -\infty \\ +\infty \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \text{se } m > 0 & " \\ \text{se } m < 0 & \end{array}$$

$$" \begin{aligned} (+\infty) \cdot (+\infty) &= +\infty \\ (-\infty) \cdot (-\infty) &= +\infty \end{aligned}$$

$$" -\infty \cdot (+\infty) = -\infty "$$

$$\begin{array}{l} x \rightarrow x_0 \quad f(x) \rightarrow +\infty \\ g(x) \geq c \geq 0 \\ \text{defte per } x \rightarrow x_0 \end{array} \quad \Bigg| \quad \longrightarrow$$

$$\underbrace{f(x) g(x)}_{\substack{\text{VI} \\ f(x)c \rightarrow +\infty}} \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x^2}_{\downarrow +\infty} \underbrace{(2 \sin x - 3)}_{\substack{\text{VI} \\ -1 < 0}} = -\infty$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\text{VI} \\ -x^2 \rightarrow -\infty}}$$

$$" \frac{l}{0^+} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} l \in (0, +\infty] \\ l \in [-\infty, 0) \end{array}$$

ecc...

Restano le consuete forme indeterminate $+\infty - \infty$,
 $\pm\infty \cdot 0$ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x^2}{(x-3)^2} = -\infty$$

$\nearrow -8$
 $\downarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2+5x+4} = +\infty$$

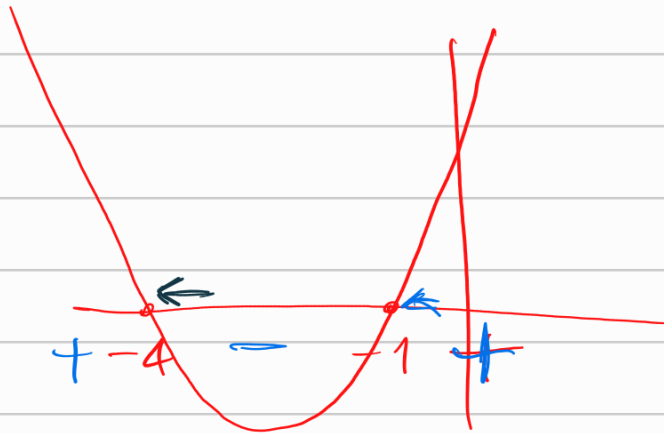
$\downarrow 0^+$

studiando il segno di x^2+5x+4
 si scopre che

$$x^2+5x+4=0 \Leftrightarrow x=-1, x=-4$$

per $x \rightarrow -1^+$

$$x^2+5x+4 \rightarrow 0^+$$



$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2+5x+4} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{1}{x^2+5x+4} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^5 + 2x^4 + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^4} \right) =$$

$\downarrow -\infty$ $\downarrow +\infty$ $\downarrow -\infty$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x^5}_{-\infty} \left(3 + o(1) \right) = (-\infty \cdot 3) = -\infty$$

$\downarrow$
 $o(1)$ per $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 + 2x^4 + x}{x^5 + 7x^2 + 1} = \left(\frac{-\infty}{-\infty} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^5} (3 + o(1))}{\cancel{x^5} (1 + o(1))} = 3.$$

Diremo che $f(x) = o(1)$ per $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}^*$

se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 + 2x^4 + x}{x^4 + 7x^2 + 1} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{l} 3x^5 + 2x^4 + x = x^5 (3 + o(1)) \\ x^4 + 7x^2 + 1 = x^4 (1 + o(1)) \end{array} \right] \quad x \rightarrow -\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^5} (3 + o(1))}{\cancel{x^4} (1 + o(1))} = (-\infty \cdot 3) = -\infty$$

Def. Scriveremo che $f(x)$ e $g(x)$ sono asint. equivalenti per $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}^*$ se (e scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \text{ ossia}$$

$$f(x) = g(x) (1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

$$f(x) \sim g(x) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Quando posso sostituire una funzione con una asintoticamente?

Sì

- nei fattori di un prodotto
- in numeratore/denominatore di frazioni
- in potenze con esponente fissato

No

- nelle somme/differenze.
- all'interno di funzioni.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 + 2x^4 + x}{x^4 + 7x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5}{x^4} = -\infty$$

Handwritten annotations: A red circle around $3x^5$ with the text $\sim 3x^5$ above it. A blue circle around x^4 in the denominator with the text $\sim x^4$ below it. A red circle around $\frac{3x^5}{x^4}$ with the text $\parallel 3x$ below it.