$$f(x): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^n$$

$f(x) = x^n$

n intero naturale

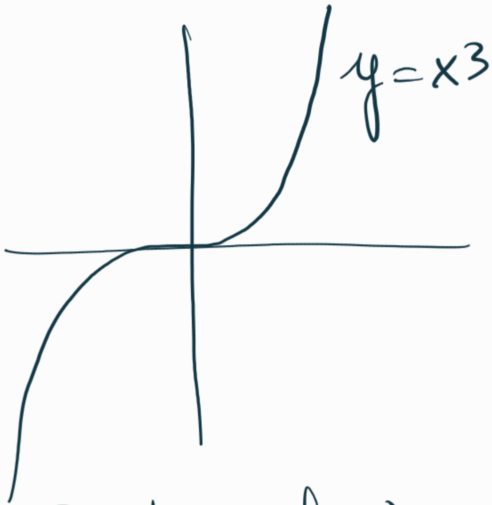
$\longrightarrow$ dispari

$x, x^3, x^5, \dots$

è biiettiva (iniettiva + suriettiva)

iniettiva perché strett. crescente

suriettiva (assume tutti i valori compresi tra $-\infty$ e $+\infty$).



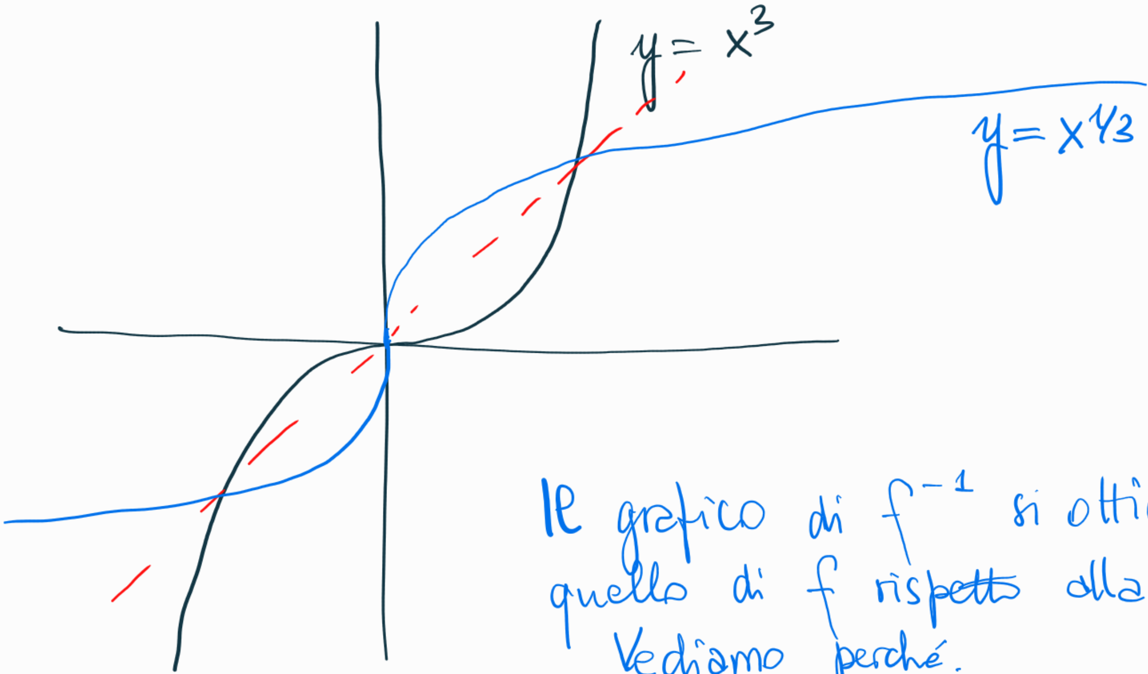
$\exists$ la funzione inversa f^{-1}

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$
$$y \longmapsto f^{-1}(y) = \text{l'unico } x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) = y$$

$f^{-1}(y)$ = radice n-esima di $y = y^{1/n}$ $\qquad x^n = y$

$$\sqrt[3]{27} = 3$$
$$\sqrt[3]{-27} = -3$$

Grafico di $f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ $\quad f(x) = x^{1/5}$



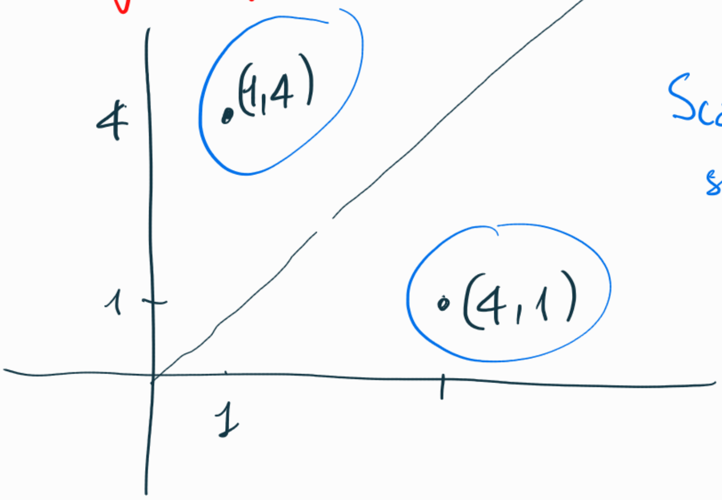
Il grafico di f^{-1} si ottiene riflettendo quello di f rispetto alla bisettrice.

Vediamo perché.

$$f^{-1}(y)=x \iff f(x)=y$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$(y,x)\in \text{graf } f^{-1} \qquad (x,y)\in \text{graf } f$$



Scambiando (x,y) con (y,x) si prende il punto simmetrico rispetto alla bisettrice.

<u>OSS</u> Se f è strett. crescente (decresc.), f^{-1} è strett. crescente (decresc.)

$f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

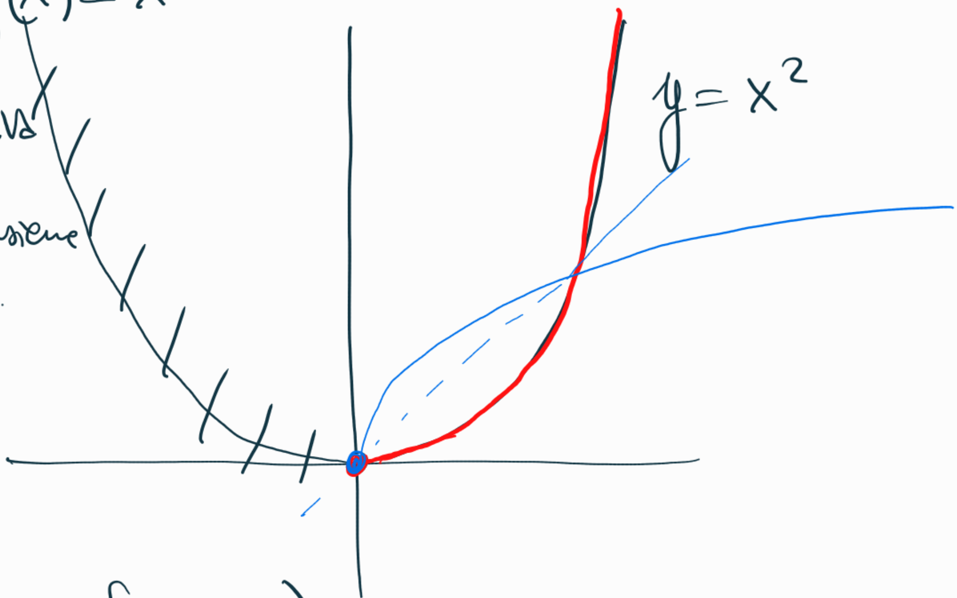
$x \mapsto f(x)=x^n$

n intero naturali <u>pari</u>

$n=2,4,6,8,\ldots$

né iniettiva né suriettiva

<u>Restringo</u> dominio e insieme di arrivo.



$f: [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$

$x \longmapsto f(x)=x^2$ (x^4)

f è iniettiva (perché strett. crescente)

f è suriettiva (continua nell'intervallo $[0,+\infty)$)

} biiettiva

$\Rightarrow$ assume tutti i valori compresi tra

$\inf f = 0$, $\sup f = +\infty$

$$f^{-1}(y) : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$$
$$y \longmapsto f^{-1}(y) = y^{1/2} = \sqrt{y} =$$

$=$ l'unico $x \in [0, +\infty)$ t.c.

$x^2 = y$.

Vediamo ora le potenze con esponente razionale.

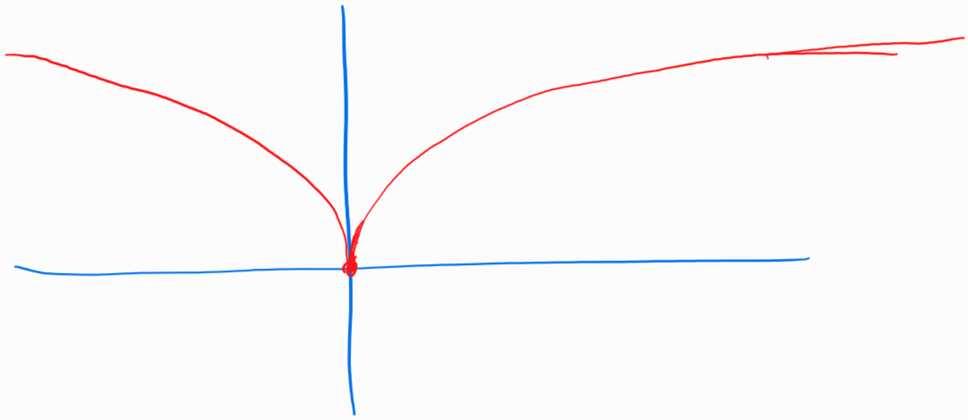
$x^q \quad q = \frac{m}{n}$; $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$.

$x^{\frac{m}{n}}$ supponiamo di aver già semplificato $\frac{m}{n}$ (primi tra loro)

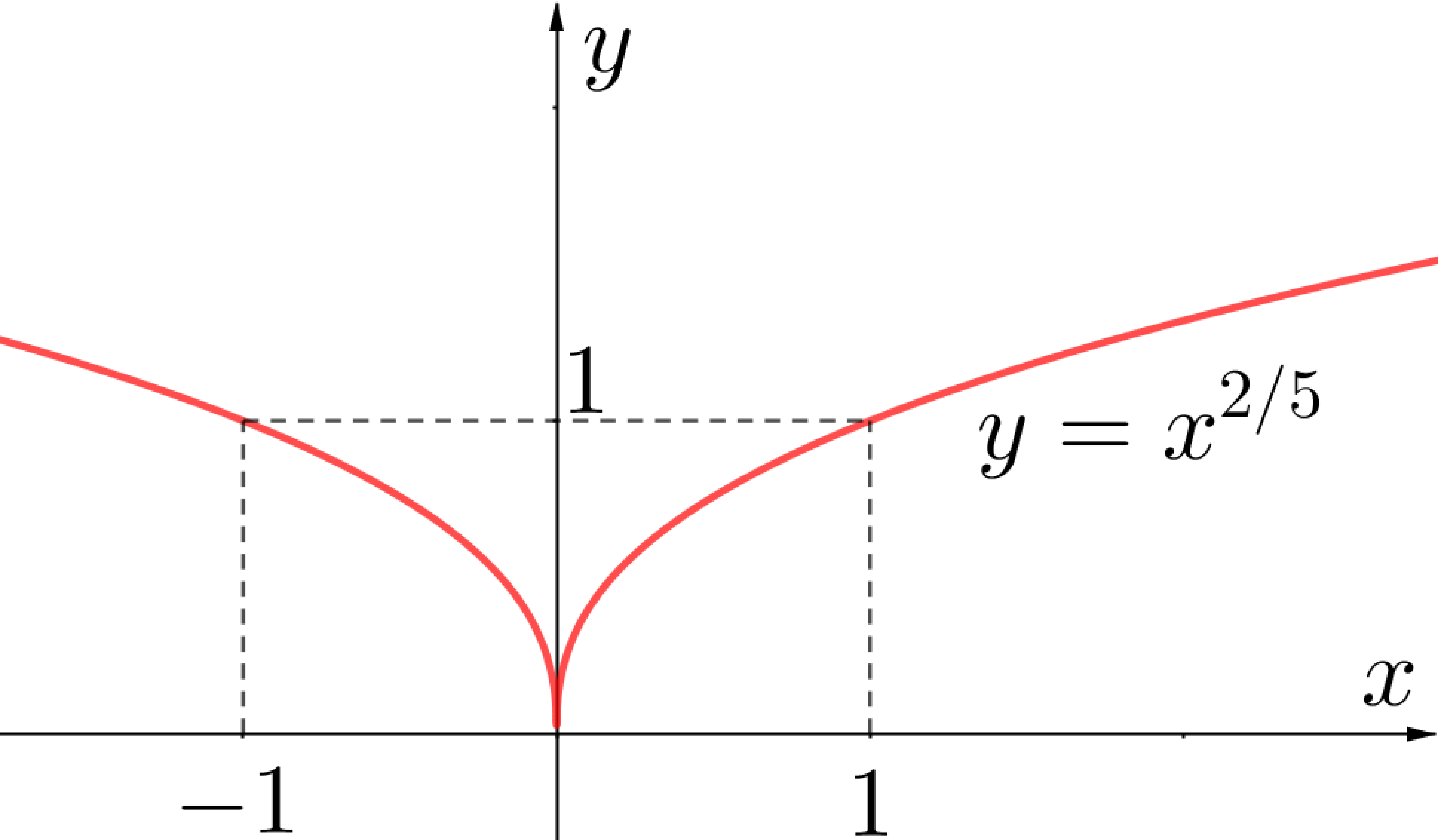
$$x^q = x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = (x^{1/n})^m$$

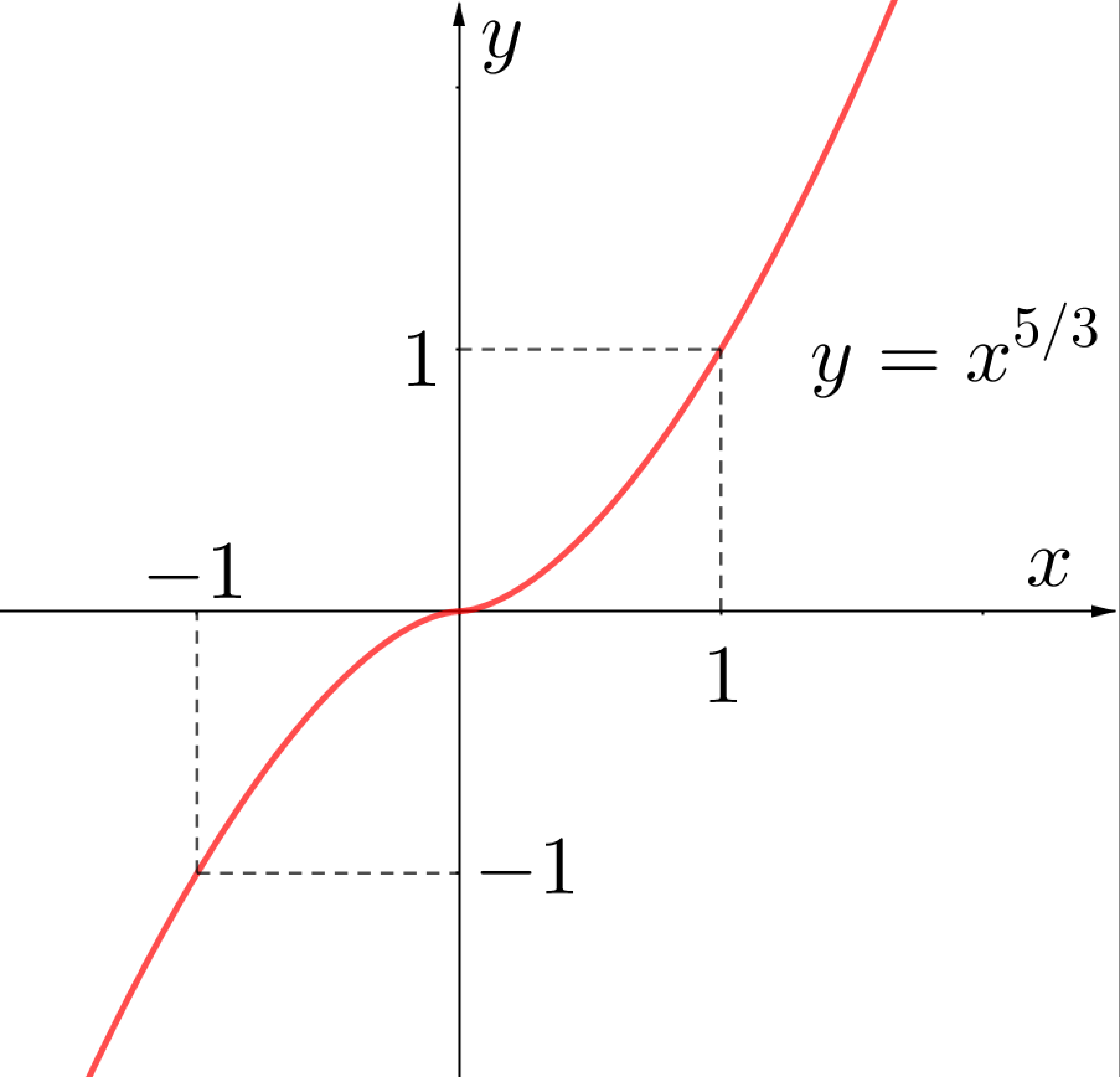
$x^{2/5} = (x^2)^{1/5} = \sqrt[5]{x^2}$ dominio $\mathbb{R}$.

crescente in $[0, +\infty)$, pari.



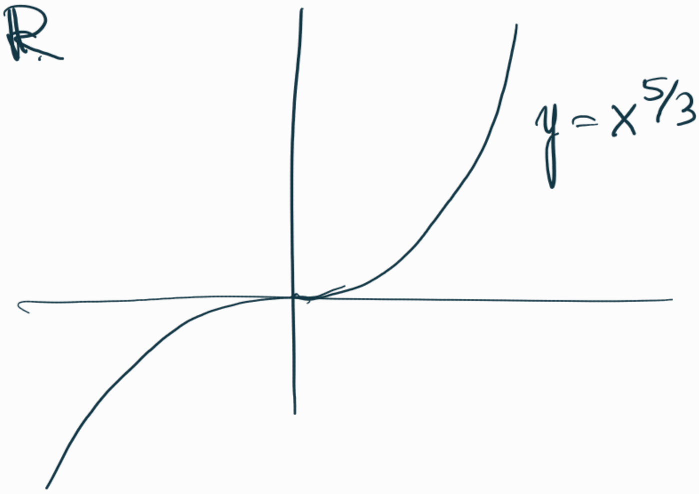
$f(x) = x^{5/3} = \sqrt[3]{x^5}$ dominio $\mathbb{R}$.


y
x
1
−1
1
y = x^{2/5}

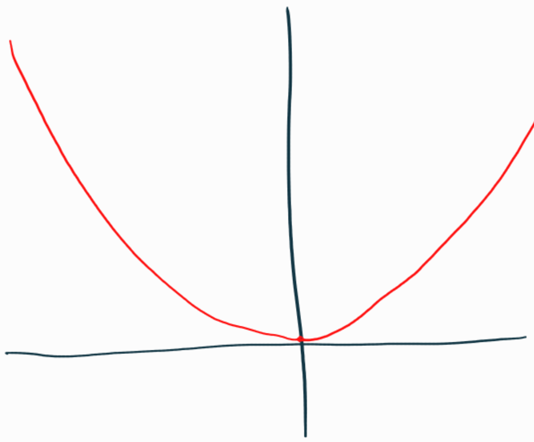


y
x
1
−1
1
−1
$y = x^{5/3}$

f dispari, strett. crescente in $\mathbb{R}$



$f(x) = x^{4/3} = \sqrt[3]{x^4}$ dominio $\mathbb{R}$, pari



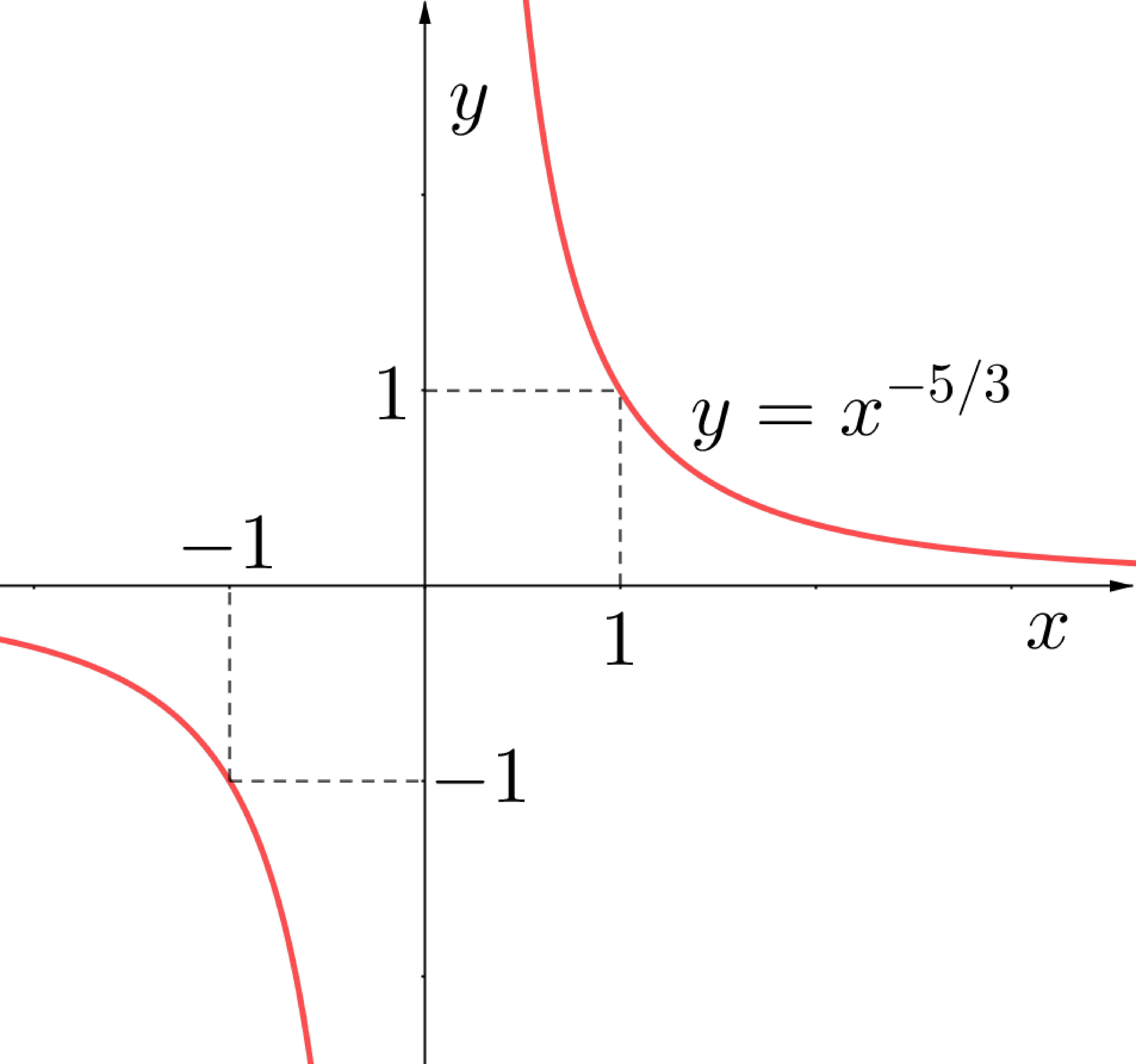
$f(x) = x^{5/2} = \sqrt{x^5}$ Dominio: $[0, +\infty)$

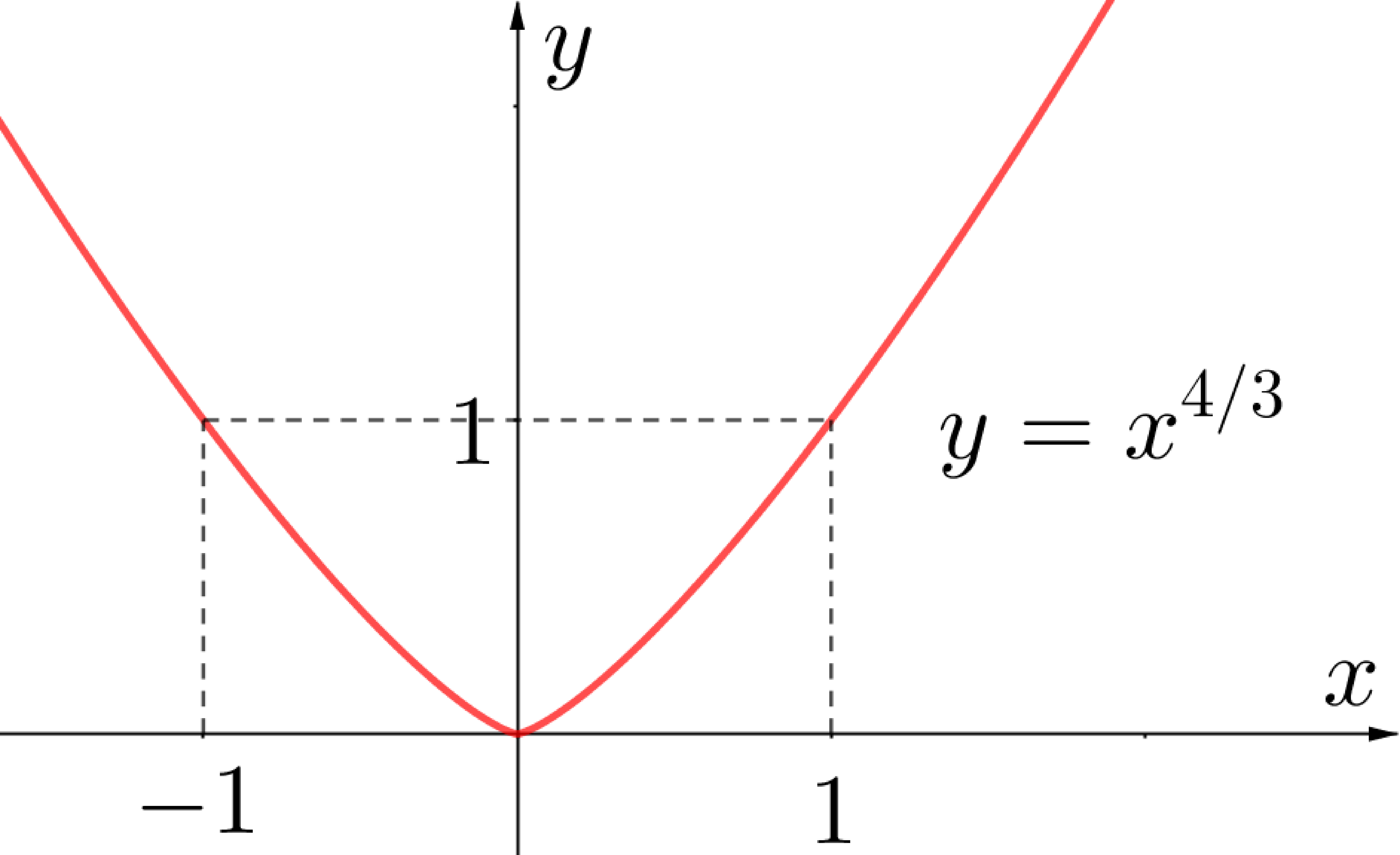
$f(x) = x^{2/5} = \sqrt[5]{x^2}$ Dominio: $\mathbb{R}$.
già vista pari.

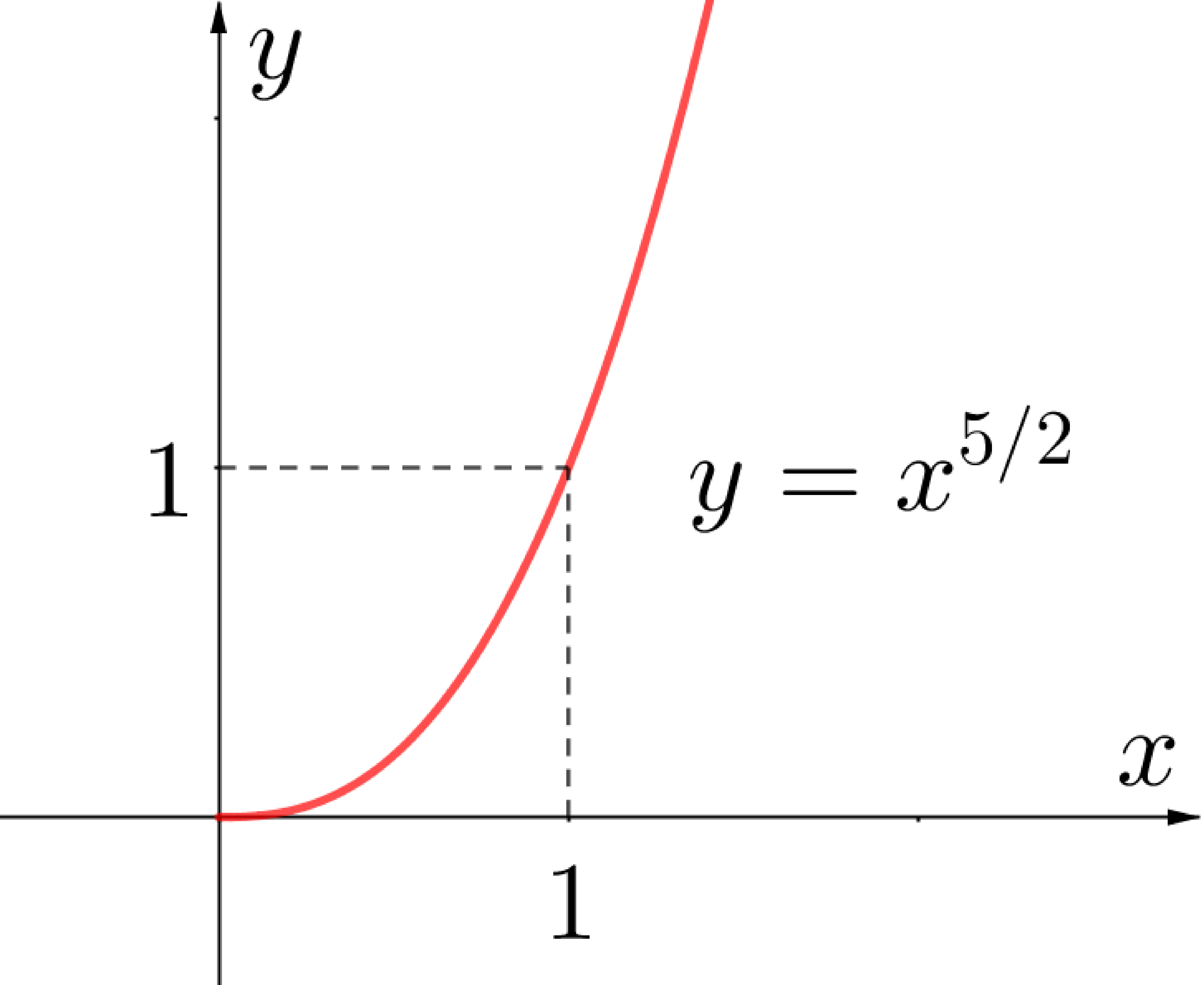
Attenzione: scriviamo $x^{1/2}$ e non $x^{2/4} = \sqrt[4]{x^2}$
perché se le scrivo dominio $[0,+\infty)$ dominio $\mathbb{R}$

come $x^{1/5}$ oppure $x^{\frac{2}{10}}$ hanno domini diverse

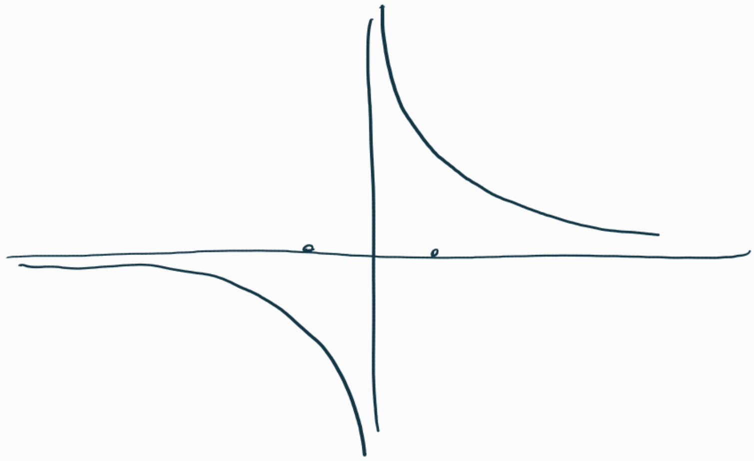
$x^{-5/3} = \dfrac{1}{x^{5/3}}$ dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
dispari.


y
1
y = x^{−5/3}
−1
1
x
−1


y
1
y = x^{4/3}
x
−1
1

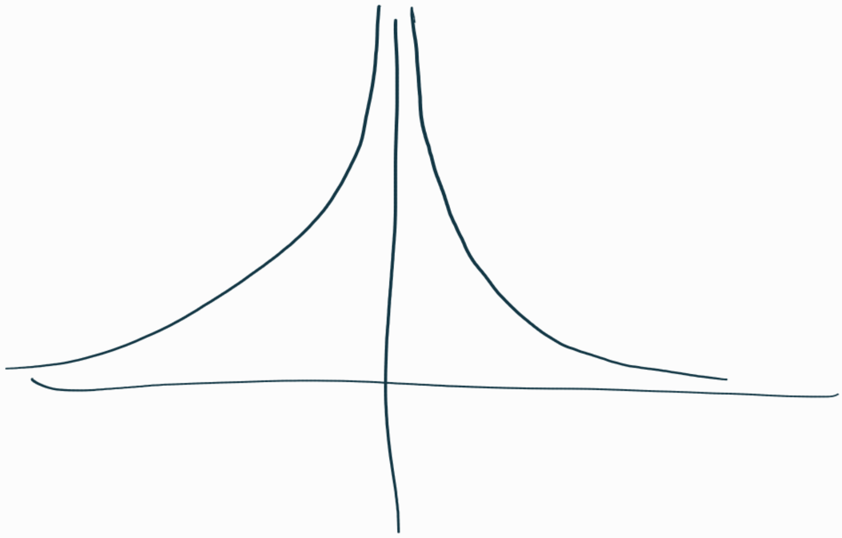


y
x
1
1
y = x^{5/2}

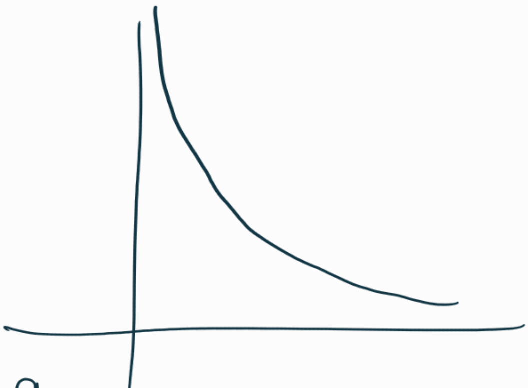


decrescente in $(0,+\infty)$
e in $(-\infty,0)$
ma non nella loro unione

$f(x) = x^{-4/5} = \dfrac{1}{x^{4/5}}$ dominio : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
pari.



$f(x)=x^{-5/4} = \dfrac{1}{x^{5/4}}$ dominio $(0,+\infty)$

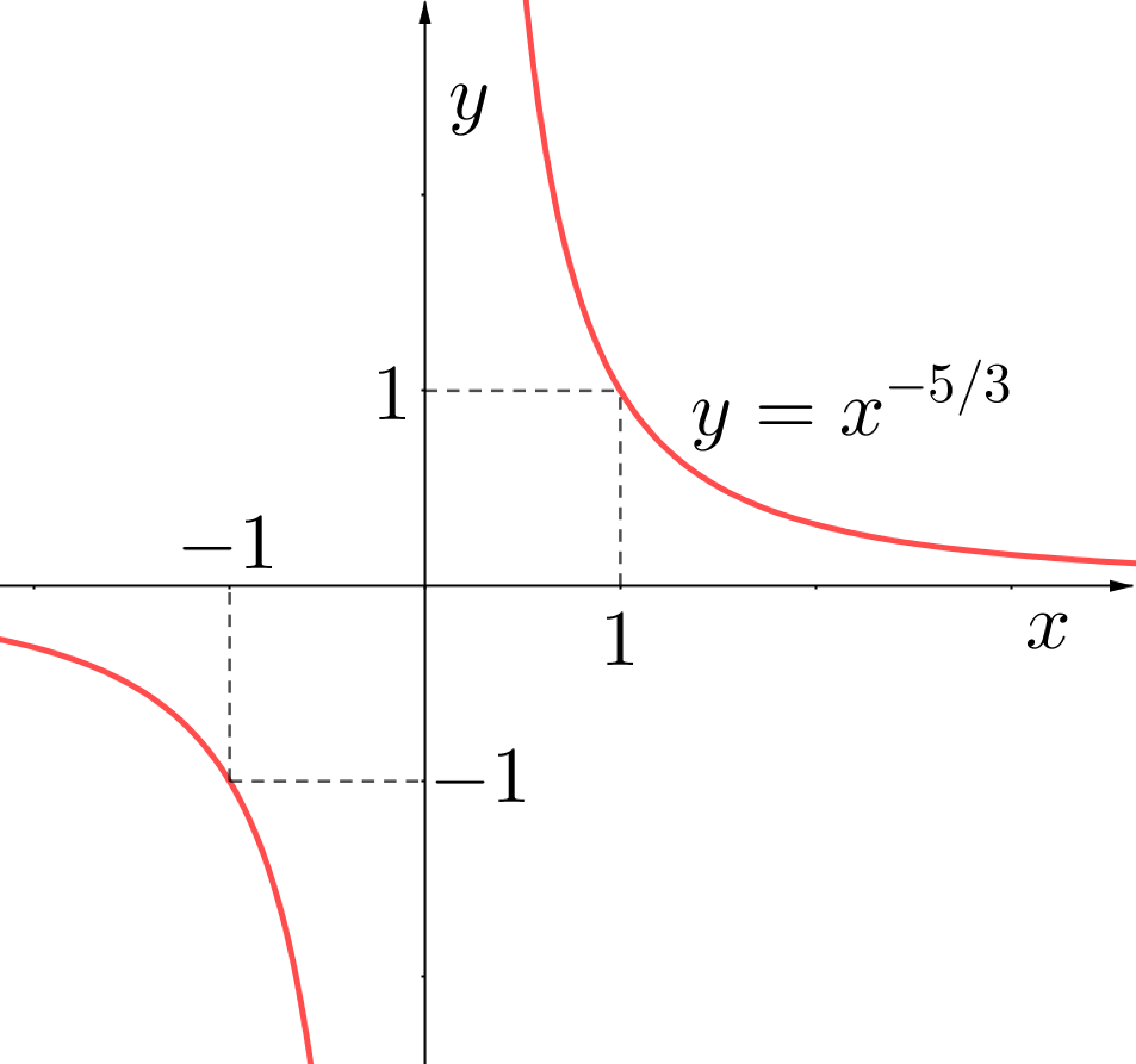


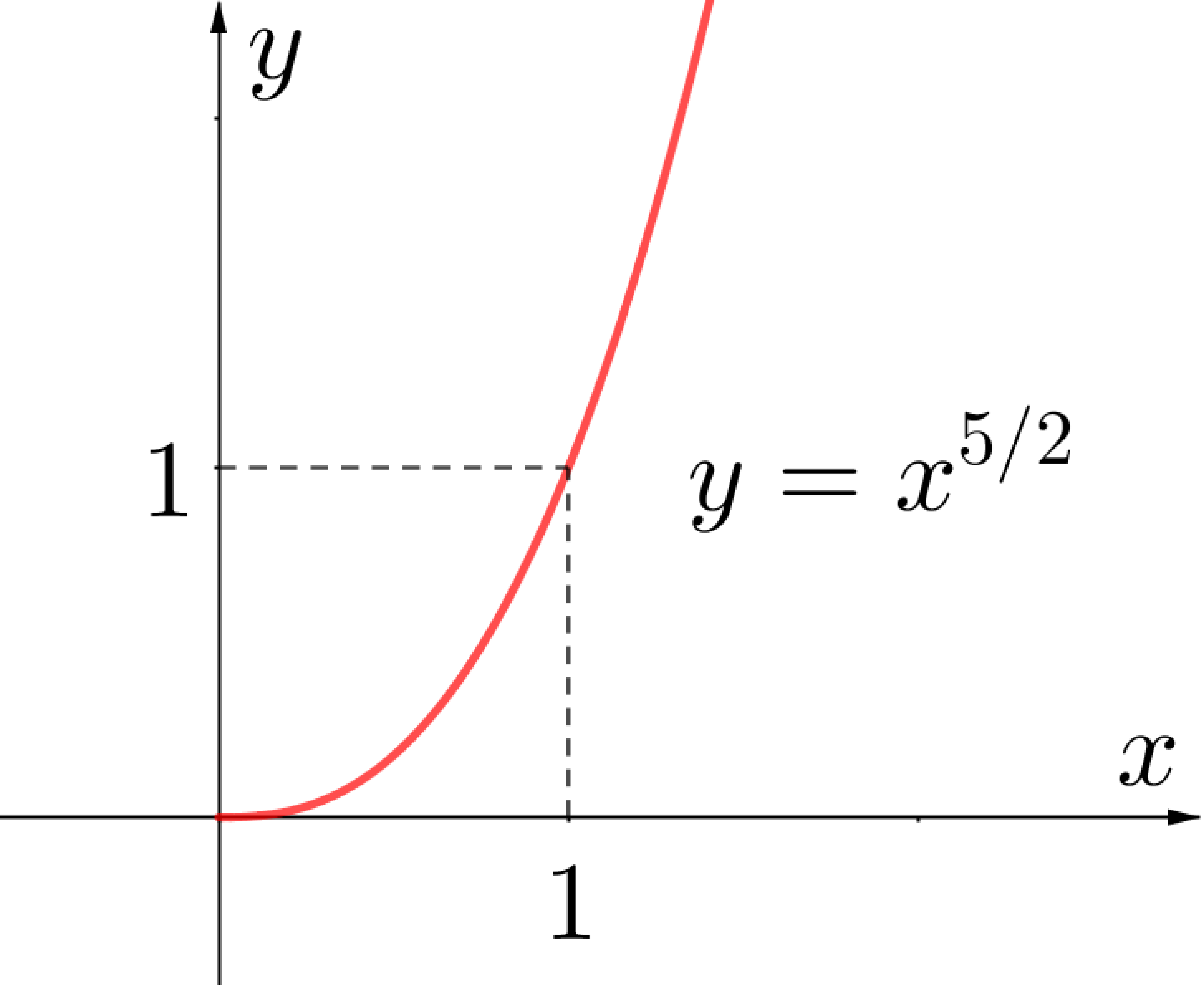
Abbiamo definito x^q con $q \in \mathbb{Q}$
Queste potenze così definite verificano le ben note proprietà delle potenze, elencate sotto in tabella

Proposizione 1.88: proprietà delle potenze

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ e $r, s \in \mathbb{Q}$ risulta:

1. $x^{r+s} = x^r \cdot x^s$;
2. $(xy)^r = x^r \cdot y^r$;
3. $(x^r)^s = x^{rs}$;
4. $x^{-r} = \dfrac{1}{x^r}$;
5. $x^r > 0, \quad x^0 = 1, \quad 1^r = 1$;
6. $\begin{cases} x^r > 1 & \text{se } x > 1 \text{ e } r > 0, \text{ oppure se } x < 1 \text{ e } r < 0 \\ x^r < 1 & \text{se } x < 1 \text{ e } r > 0, \text{ oppure se } x > 1 \text{ e } r < 0; \end{cases}$
7. $r < s \Rightarrow \begin{cases} x^r < x^s & \text{se } x > 1 \\ x^r > x^s & \text{se } x < 1; \end{cases}$
8. $0 < x < y \Rightarrow \begin{cases} x^r < y^r & \text{se } r > 0 \\ x^r > y^r & \text{se } r < 0; \end{cases}$
9. se $x \neq 1$, $\quad x^r = x^s \Rightarrow r = s$.


y
1
$y = x^{-5/3}$
−1
1
x
−1


y
x
1
1
y = x^{5/2}

<u>Obiettivo:</u> estendere le potenze agli esponenti irrazionali.

2^{π} come si definisce?

$\pi = 3{,}1415926\ldots$

$2^3 = 8$

$2^{3,1} = 2^{\frac{31}{10}}$

$2^{3,14} = 2^{\frac{314}{100}}$

$2^{3,141} = 2^{\frac{3141}{1000}}$

succ^ne crescente e limitata superiormente.

$\Downarrow$

converge a un limite finito, che chiamiamo 2^{π}