

DEF. LIMITE

$f(x): X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ pto di accum. di X , $l \in \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$\Leftrightarrow \forall U$ intorno di l si ha $f(x) \in U$
def^{te} per $x \rightarrow x_0$.

1) $x_0 \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c.

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in X \text{ verificante}$$
$$0 < |x - x_0| < \delta$$

2) $x_0 = +\infty, l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x) - l| < \varepsilon$

$\forall x \in X$ verificante $x > K$.

3) $x_0 \in \mathbb{R}, l = -\infty$

Intorni di $-\infty$:
Intorni di x_0

$$V = (-\infty, M)$$

$$U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$$

$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) < M$

$\forall x \in X$ verificante $0 < |x - x_0| < \delta$

Oss Basta considerare $M < 0$, e quindi lo chiamo $-M$, con $M > 0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) < -M \\ \forall x \in X \text{ verificante } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Esempio Verifichiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^4} \right) = -\infty$$

Fissato $M > 0$, cerco $\delta > 0$ t.c. $-\frac{1}{x^4} < -M$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ verificante } 0 < |x - 0| < \delta$$

$$-\frac{1}{x^4} < -M \Leftrightarrow \frac{1}{x^4} > M \Leftrightarrow x^4 < \frac{1}{M} \Leftrightarrow |x| < \sqrt[4]{\frac{1}{M}}$$

δ

Caso 4 $x_0 = -\infty \quad l = +\infty$

Intorni di $+\infty$ $\mathcal{V} = (M, +\infty)$

Intorni di $-\infty$ $\mathcal{U} = (-\infty, k)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x) > M \\ \forall x \in X \text{ verificante } x < k$$

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$$

Fissato $M > 0$, cerco $k \in \mathbb{R}$ t.c. $x^4 > M$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ verificante } x < k$$

$$x^4 > M \Leftrightarrow (x < -\sqrt[4]{M}) \vee (x > \sqrt[4]{M}) \Leftrightarrow x < -\sqrt[4]{M}$$

k
 $\sqrt[4]{M}$

Esercizio importante: scrivere le altre 5 defⁿⁱ di limite.

Altre verifiche:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$$

$$\forall M > 0 \quad \exists k \text{ t.c. } 2^x > M \quad \forall x > k.$$

$$2^x > M \iff x > \log_2 M =: k.$$

applico $\log_2$, che è crescente

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ cerco } k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } 2^x < \varepsilon \quad \forall x < k.$$

$$2^x < \varepsilon \iff x < \log_2 \varepsilon =: k$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x+1} = \frac{3}{4}$$

Verifica Fissato $\varepsilon > 0$, cerco $\delta > 0$ t.c. $\left| \frac{x}{x+1} - \frac{3}{4} \right| < \varepsilon$
 $\forall x \neq -1$ verificante $0 < |x-3| < \delta$

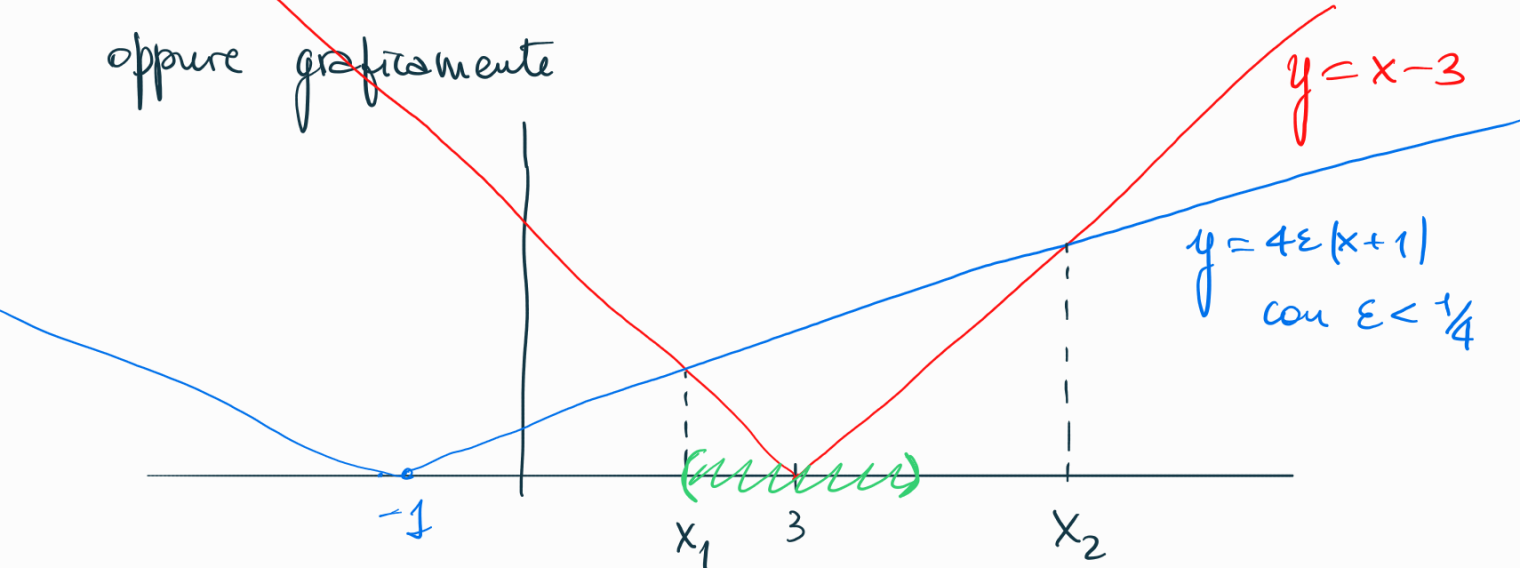
$$\left| \frac{x}{x+1} - \frac{3}{4} \right| < \varepsilon \iff \left| \frac{4x - 3x - 3}{4(x+1)} \right| < \varepsilon$$

$$\iff \frac{|x-3|}{4|x+1|} < \varepsilon$$

$$\stackrel{\updownarrow}{\iff} \text{1° modo } |x-3| < 4\varepsilon |x+1|$$

diseg^{no} che si risolve, o sforando il modulo (falso)

oppure graficamente



Cerco x_1 $4\varepsilon(x+1) = 3-x$ $x(1+4\varepsilon) = 3-4\varepsilon$

$$x_1 = \frac{3-4\varepsilon}{1+4\varepsilon}$$

Cerco x_2 $4\varepsilon(x+1) = x-3$

$$x(1-4\varepsilon) = 3+4\varepsilon$$

$$x_2 = \frac{3+4\varepsilon}{1-4\varepsilon}$$

$$\delta = \min \{ 3-x_1, x_2-3 \} = 3-x_1$$

2° modo $\frac{|x-3|}{4|x+1|} < \varepsilon$

OSS se $|x-3| < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow 3 < x+1 < 5 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3 < |x+1| < 5$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x+1|} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{|x-3|}{4|x+1|} < \frac{|x-3|}{12} < \varepsilon$$

$$|x-3| < 1$$

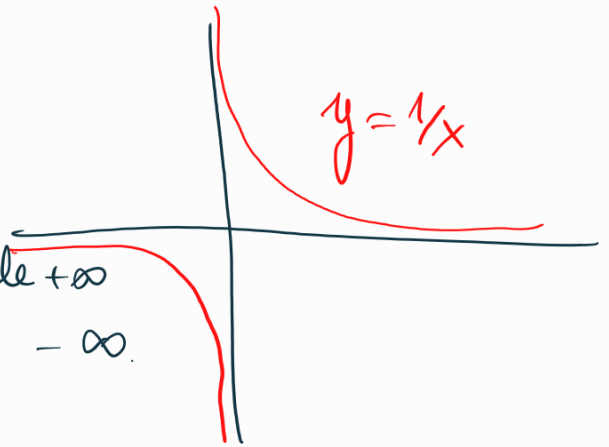
$$|x-3| < 12\varepsilon$$

scelgo $\delta = \min \{ 1, 12\varepsilon \}$
 e $|x-3| < \delta$

se $|x-3| < \delta$ i passaggi della riga sopra sono tutti veri

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \nexists.$$

se $x \rightarrow 0$ da valori positivi, il limite vale $+\infty$
 $x \rightarrow 0$ " " negativi, " " $-\infty$.



In questo caso scriviamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

come illustrato dalla seguente definizione

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sia $E \subset X$.

definiamo $f|_E(x) = f(x) \quad \forall x \in E$

$f|_E: E \rightarrow \mathbb{R}$ "restrizione di f a E "

DEF Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Diremo che $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ (limite da destra)

se la restrizione $f|_{X \cap (x_0, +\infty)}$ verifica

$\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{X \cap (x_0, +\infty)}(x) = l$, cioè

$\forall U$ intorno di $l \quad \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \in U$

$\forall x \in X$ verificante $x_0 < x < x_0 + \delta$

Diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

(limite da sinistra)

se la restrizione

$$f|_{X \cap (-\infty, x_0)}$$

verifica

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{X \cap (-\infty, x_0)}(x) = l, \text{ cioè}$$

$\forall U$ intorno di $l \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \in U$

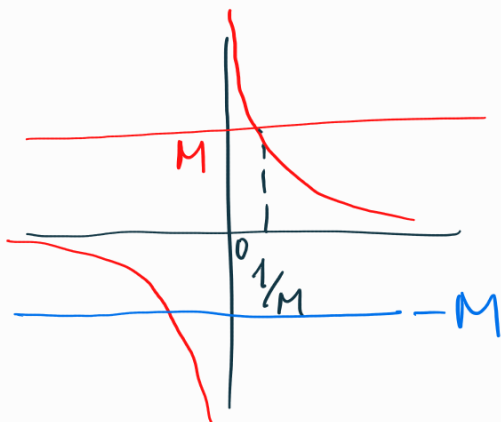
$\forall x \in X$ verificante $x_0 - \delta < x < x_0$

Verifichiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$\forall M > 0$ cerco $\delta > 0$ t.c. $\frac{1}{x} > M \quad \forall x$ verificante
 $0 < x < \delta$

$$\frac{1}{x} > M \iff 0 < x < \frac{1}{M} =: \delta$$

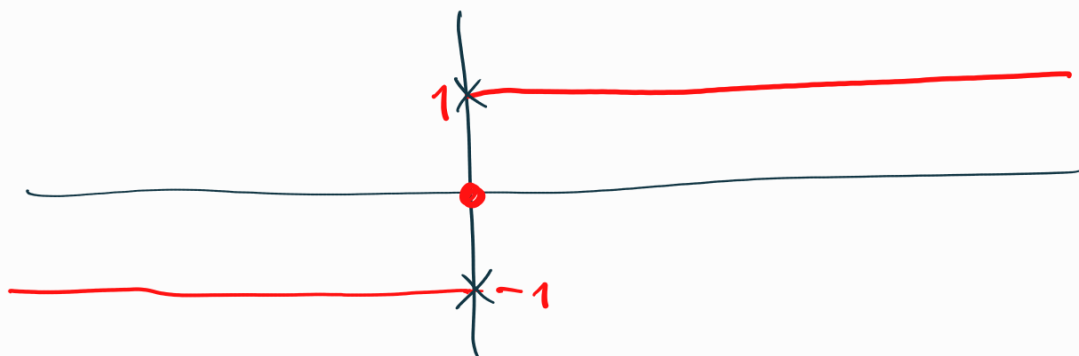


$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

$\forall M > 0$ cerco $\delta > 0$ t.c. $\frac{1}{x} < -M \quad \forall x$ verificante $-\delta < x < 0$

$$\frac{1}{x} < -M \Leftrightarrow -\frac{1}{M} < x < 0 \quad \text{scelgo } \delta = \frac{1}{M}$$

$$f(x) = \text{sign } x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sign } x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sign } x &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1 \end{aligned} \quad \left| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \text{sign } x \nexists \right.$$

OSS Per considerare $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, x_0 deve essere pto di accumulazione di $X \cap (x_0, +\infty)$, ossia ogni intorno "destro" di x_0 $(x_0, x_0 + \delta)$ deve contenere infiniti punti di X .

OSS 2 Se x_0 è pto di accumulazione di X sia destro che da sinistra, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

DEF

Limiti per eccesso o per difetto. sia $l \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^+ \text{ significa } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \\ f(x) > l \text{ defte per } x \rightarrow x_0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 = 0^-$$

I limiti da destra e sinistra si possono combinare con quelli per eccesso e per difetto.

TEOREMA "PONTE"

tra limiti di successioni e di funzioni

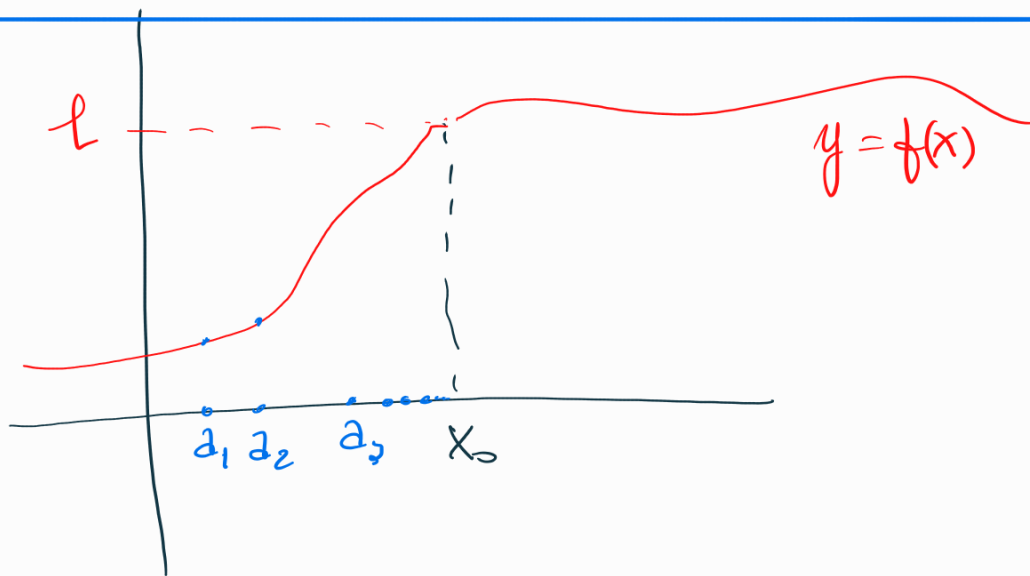
Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $l, x_0 \in \mathbb{R}^*$, x_0 pto di accumul.^{ne} di X .

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff$$

$\forall$ succ.^{ne} $\{a_n\}$ a valori in $X \setminus \{x_0\}$
t.c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l.$$



Esempio di applicazione

Voglio provare che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

mediante il teorema ponte

Sia $a_n \neq 0$ t.c. $a_n \rightarrow 0$

$$f(a_n) = \frac{1}{a_n^2} \rightarrow +\infty \quad \text{Questo è vero } \forall (a_n) \text{ t.c. } a_n \neq 0, a_n \rightarrow 0.$$

$a_n^2 \rightarrow 0^+$

(Teorema ponte $\Leftrightarrow$) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 1 \\ 1 & \text{se } b = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < b < 1. \end{cases}$$

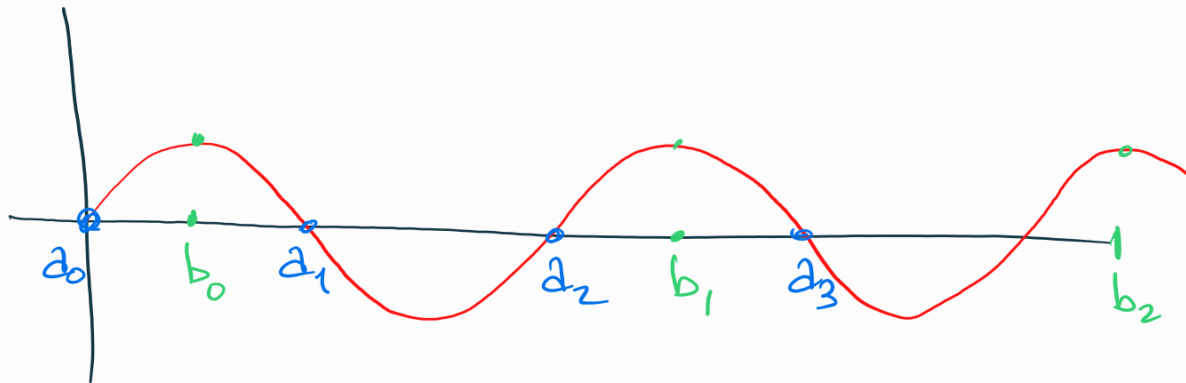
Facciamolo con il thm. ponte ($b > 1$)

sia $a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow f(a_n) = b^{a_n} \rightarrow +\infty$

questo è vero $\forall$ successione così fatta $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = +\infty$

Esempio "in negativo".

Provare che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x \nexists$.



Se fosse $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = l$,

$\forall$ successione $a_n \rightarrow +\infty$, per il thm. ponte ($\Rightarrow$)

dovrei avere $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin a_n = l$

Io invece troverò due succ^{te} $a_n, b_n \rightarrow +\infty$

f.c. $\sin a_n, \sin b_n$ hanno limiti diversi

$$a_n = n\pi \rightarrow +\infty$$

$$\sin a_n = \sin(n\pi) = 0 \rightarrow 0$$

$$b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \rightarrow +\infty$$

$$\sin b_n = 1 \rightarrow 1$$