

## CRITERIO del RAPPORTO per succ<sup>ni</sup>.

$\{a_n\}$  successione di termini positivi.

se  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l$ , allora:

- se  $l \in (1, +\infty]$ ,  $a_n \rightarrow +\infty$ ;
- se  $l \in [0, 1)$ ,  $a_n \rightarrow 0$ .

Dim. Supponiamo  $l \in (1, +\infty]$ .

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq M > 1 \quad \text{def<sup>te</sup> } (\forall n \geq n_0)$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{se } l = +\infty, \text{ si può prendere } M=2. \\ \text{se } l \in (1, +\infty), \text{ " " " } M = \frac{1+l}{2} \end{array} \right) \quad \begin{array}{c} | \quad | \\ 1 \quad l \end{array}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad \text{si ha} \quad a_{n+1} \geq M a_n.$$

$$n = n_0$$

$$a_{n_0+1} \geq M a_{n_0}$$

$$n = n_0 + 1$$

$$a_{n_0+2} \geq M a_{n_0+1} \geq M^2 a_{n_0}$$

$$\underline{n \text{ generico } \geq n_0}$$

$$a_n \geq M^{n-n_0} a_{n_0} = M^n$$

$$\frac{a_{n_0}}{M^{n_0}} \quad \text{" } C > 0$$

Thm del cossiniere  $\Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$ .

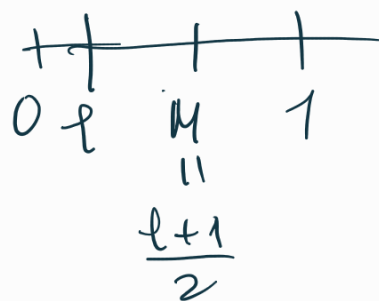
$$\downarrow n \rightarrow +\infty \\ +\infty$$

2) se invece

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l < 1.$$

si avrà def<sup>te</sup>

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq M < 1$$



$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq M$$

$$\forall n \geq n_0$$

$$a_{n+1} \leq M a_n$$

$$a_{n_0+1} \leq M a_{n_0}$$

$$a_{n_0+2} \leq M a_{n_0+1} \leq M^2 a_{n_0}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq a_n \leq M^{n-n_0} a_{n_0} = M^n$$

$$\frac{a_{n_0}}{M^{n_0}}$$

$\equiv C$

0

II

Thm. dei carabinieri  $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$

OSS nel caso  $l > 1$ , abbiamo provato che  $a_n \rightarrow +\infty$  esponenzialmente

se  $l < 1$ , abbiamo provato che  $a_n \rightarrow 0$  esponenzialmente

Il criterio non funziona se  $a_n \sim$  potenza di  $n$   
(viene  $l=1$ )

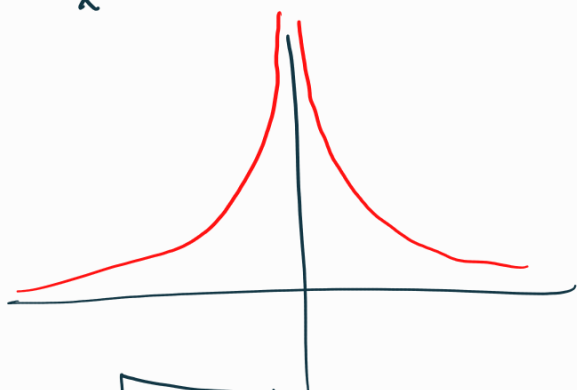
## Limiti di funzioni

Vogliamo definire espressioni del tipo

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  vuol dire "quando  $x$  va verso  $+\infty$ ,  $\frac{1}{x}$  si avvicina a 0"

$\lim_{x \rightarrow 5} (3x^2 + x) = 80$  vuol dire "quando  $x$  si avvicina a 5,  $3x^2 + x$  si avvicina a 80"

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$  vuol dire "quando  $x$  si avvicina a 0,  $\frac{1}{x^2}$  va verso  $+\infty$ ."



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

La prima cosa da fare per definire  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

è capire chi può essere  $x_0$ . Questo è legato al dominio di  $f$ .

$$f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Per esempio: se  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , ha senso considerare il limite per  $x \rightarrow 0$ , per  $x \rightarrow 1$ , per  $x \rightarrow \frac{3}{4}$ ,  
ma non per  $x \rightarrow 2$  o per  $x \rightarrow +\infty$

**DEF** Punti di accumulazione di un insieme.

Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$ . sia  $x_0 \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ .

$x_0$  si dice punto di accumulazione di  $X$  se

ogni intorno di  $x_0$  contiene infiniti punti di  $X$ .

Un pto di  $X$  che non è pto di accum<sup>ne</sup> di  $X$   
si dice punto isolato di  $X$ .

Esempi

$$X = (0, 1)$$



$\frac{1}{2}$  è pto di accumul<sup>ne</sup> di  $X$ ? sì

0 " " " " di  $X$ ? sì

1 " " " " " " ? sì

$\frac{3}{2}$  " " " " " " ? NO

$\pm\infty$  " " " ? NO

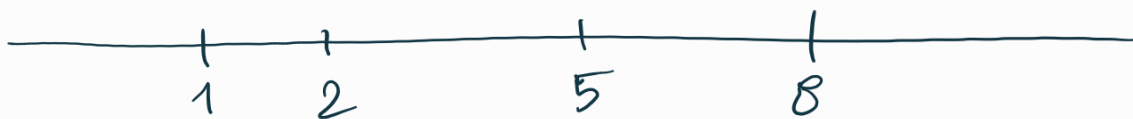
I punti di accumul<sup>ne</sup> di  $X = (0, 1)$  sono i pti di  $[0, 1]$ .

Se  $X = [0, 1]$ , i suoi punti di accumulazione restano gli stessi.

$$X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

I pti di accumul<sup>ne</sup> di  $X$  sono tutti i pti di  $\mathbb{R}^*$

Se  $X = \{1, 2, 5, 8\}$ , esso non ha pti di accumul<sup>ne</sup>.



i suoi punti sono tutti punti isolati.

Se  $X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , esso è costituito da punti isolati, solo  $+\infty$  è pto di accumul<sup>ne</sup>.

Questo è il motivo per cui di una successione (funzione definita in  $\mathbb{N}$ ) si può fare solo il limite per  $x \rightarrow +\infty$ .

Se  $X = \mathbb{Q}$ , i suoi pti di accumul<sup>ne</sup> sono i punti di  $\mathbb{R}^*$

## Proprietà vere definitivamente

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $P(x)$  una proprietà dipendente da  $x \in X$ .

Diremo che  $P(x)$  è vera definitivamente per  $x \rightarrow x_0$  se:

- 1)  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  è pto di accumul. di  $X$ ;
- 2)  $\exists$  intorno  $U$  di  $x_0$  t.c.  $P(x)$  è vera  $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$

### Esempi.

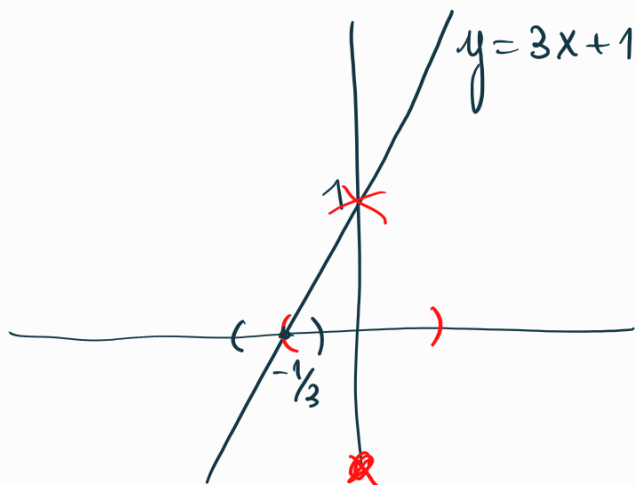
(di solito, se non specificato, si prende  $X$  l'insieme in cui ha senso  $P(x)$ ).

- 1)  $3x+1 > 0$  def<sup>te</sup> per  $x \rightarrow 0$ ?  
 $x_0$

$(X = \mathbb{R})$

Voglio vedere se  $\exists$  un intorno  $U$  di  $x_0 = 0$  t.c.

$3x+1 > 0$  è vera  $\forall x \in U \cap \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$$3x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$$

La proprietà  $P(x)$  è vera  
in  $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = U$

(compreso 0)  
ma non importa.

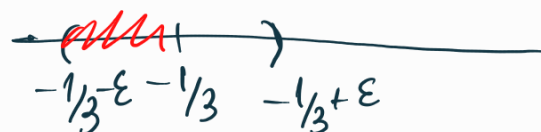
OSS 2) Se considerassi  $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{se } x \neq 0 \\ -5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

posso dire che  $f(x) > 0$  def<sup>te</sup> per  $x \rightarrow 0$ ? sì.

3)  $3x+1 > 0$  def<sup>te</sup> per  $x \rightarrow -1/3$ ?

NO perché preso un qualunque intorno di  $x_0 = -1/3$

$$U = \left(-\frac{1}{3} - \varepsilon, -\frac{1}{3} + \varepsilon\right)$$



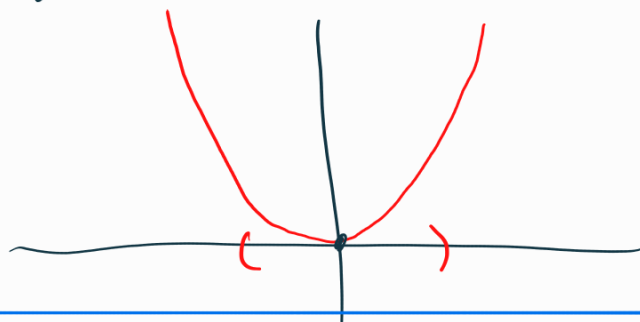
la cond<sup>te</sup>  $P(x) = 3x+1 > 0$  non è vera in  $\left(-\frac{1}{3} - \varepsilon, -\frac{1}{3}\right)$

4)  $x^2 > 0$  def<sup>te</sup> per  $x \rightarrow 0$ ?

Sì, perché  $x^2 > 0$  è vero in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

e quindi posso prendere  $U = (-1, 1)$  (per esempio)

e  $x^2 > 0$  è vero  $\forall x \in U \setminus \{0\}$



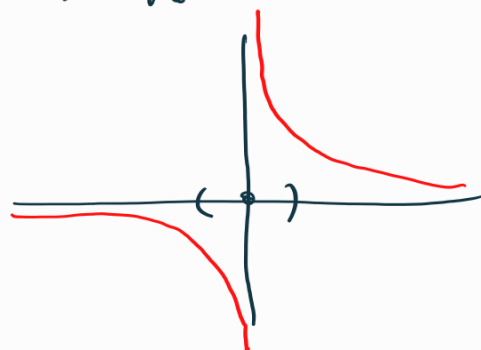
5)  $x^2 > 1000$  def<sup>te</sup> per  $x \rightarrow -\infty$ ?

$$x^2 > 1000 \Leftrightarrow (x < -10\sqrt{10}) \vee (x > 10\sqrt{10}) \Leftrightarrow x < -10\sqrt{10}$$

Basta prendere l'intorno  $(-\infty, -10\sqrt{10})$

6)  $\frac{1}{x} > 0$  def<sup>te</sup> per  $x \rightarrow 0$ ? NO

perché è falsa  $\forall x < 0$



Oss se  $X = \mathbb{N}$  la def<sup>ne</sup> di "definitivamente"  
coincide con quella già vista.

$P(n)$  è vera def<sup>te</sup> per  $n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \exists U = (K, +\infty)$  t.c.  
 $P(n)$  è vera  $\forall n \in U$   
cioè  $\forall n > K$ .

DEF limite di funzione.

Sia  $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  pto di accum. di  $X$ .

Sia  $l \in \mathbb{R}^*$ .

Diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

(oppure che  $f(x) \rightarrow l$  per  $x \rightarrow x_0$ )

se  $\forall U$  intorno di  $l$  si ha  $f(x) \in U$  def<sup>te</sup> per  $x \rightarrow x_0$

cioè, se

$\forall U$  intorno di  $l \quad \exists U$  intorno di  $x_0$  t.c.  $f(x) \in U$   
 $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$ .

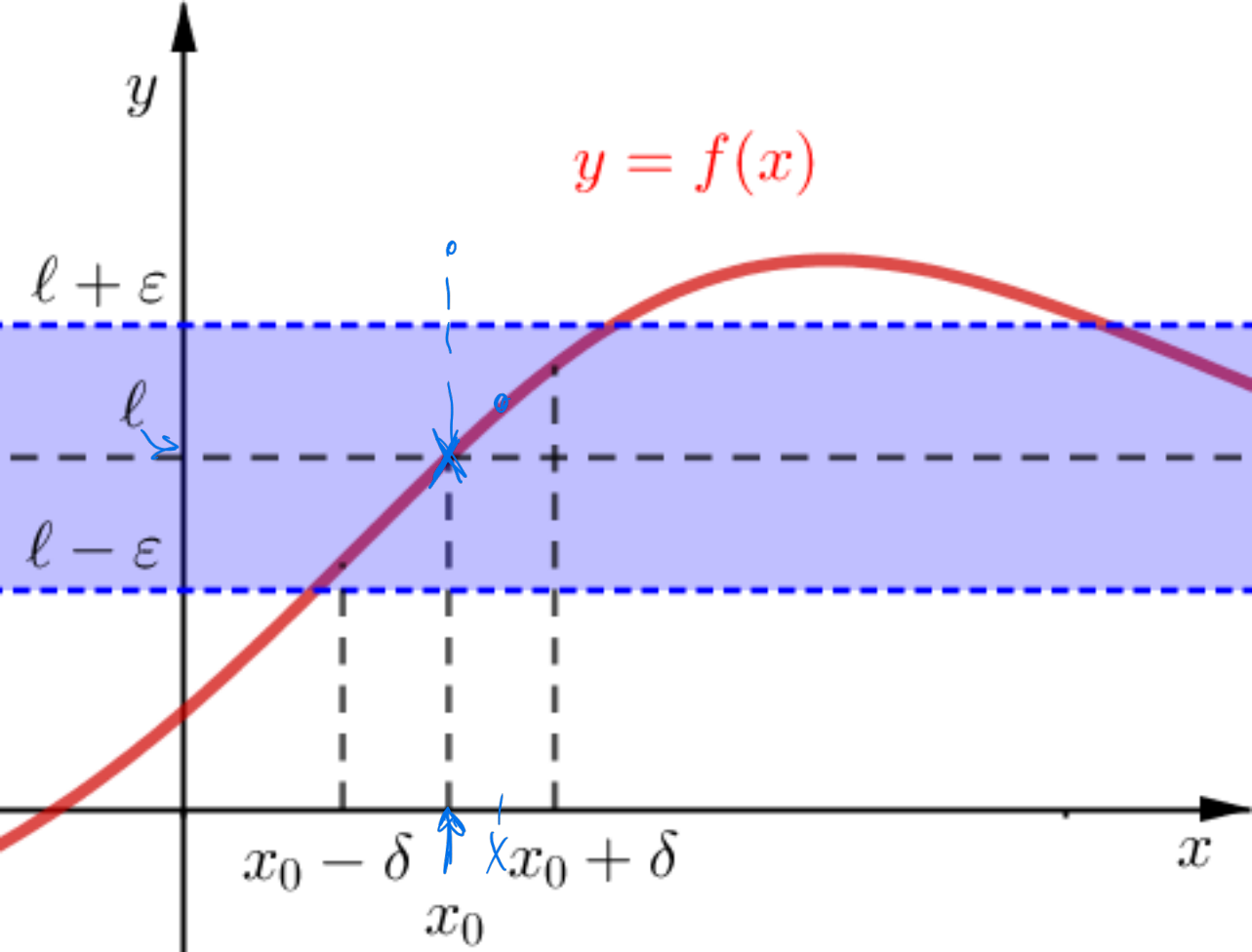
---

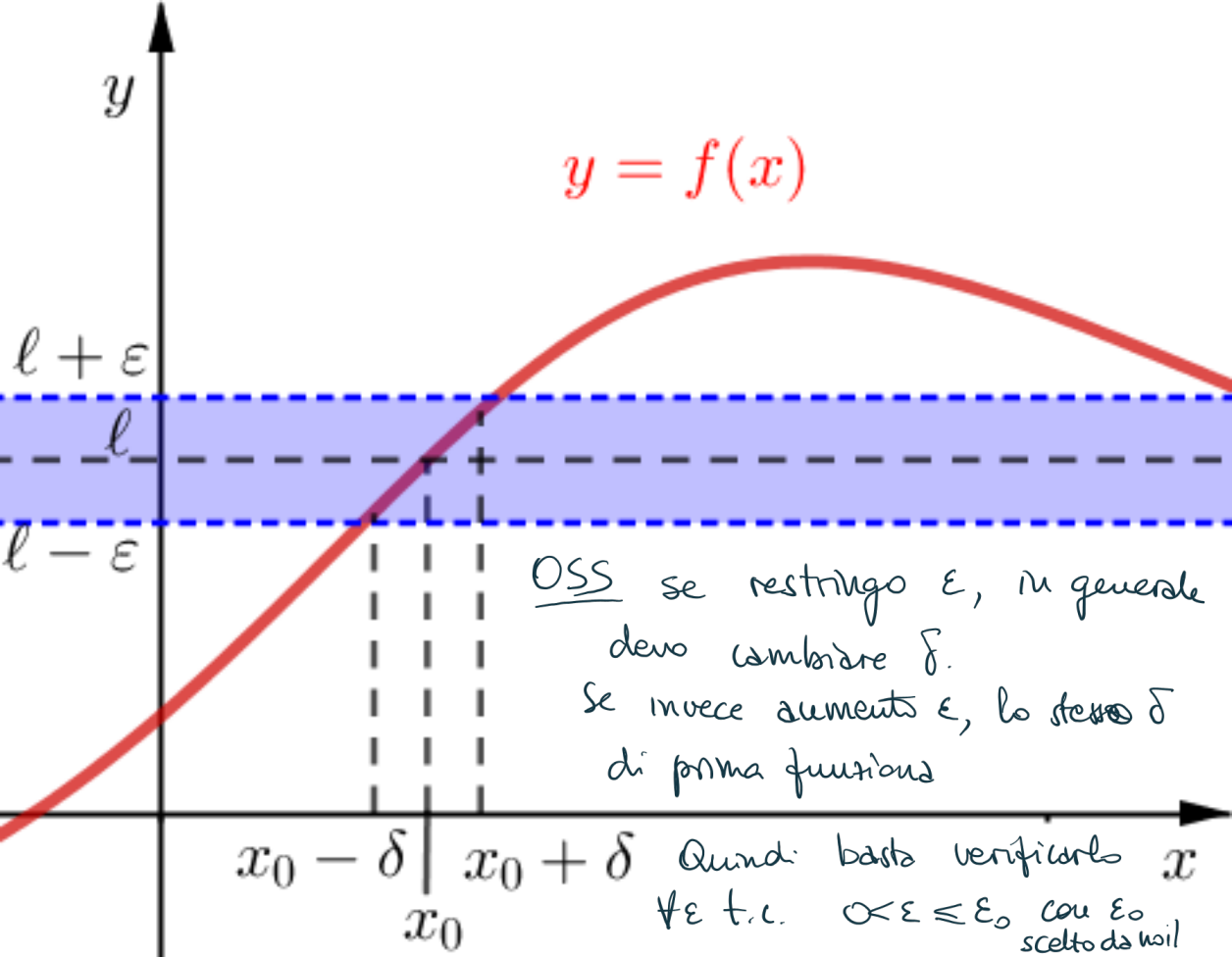
Questa def<sup>ne</sup> prende varie forme a seconda che:

$$x_0 \in \mathbb{R}, \quad x_0 = +\infty, \quad x_0 = -\infty$$

$$l \in \mathbb{R} \quad l = +\infty, \quad l = -\infty$$

(9 casi in totale)





1° caso:  $x_0 \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}$ .

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  significa.

$\forall V$  intorno di  $l \quad \exists U$  intorno di  $x_0$  t.c.

$$\begin{array}{cc} \text{"} B_\varepsilon(l) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon) & \text{"} B_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ \text{con } \varepsilon > 0 & \text{con } \delta > 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} f(x) \in V & \forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\} \\ \Downarrow & \Downarrow \\ l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon & \forall x \in X \text{ t.c. } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \\ \Downarrow & x \neq x_0 \\ |f(x) - l| < \varepsilon & \Downarrow \\ & \forall x \in X \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta \\ & \quad \quad \quad \downarrow \\ & \quad \quad \quad x \neq x_0 \end{array}$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  significa

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c. } |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in X \text{ verificante } 0 < |x - x_0| < \delta$$

Esempio  $X = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$x_0 = 0, l = 0$$

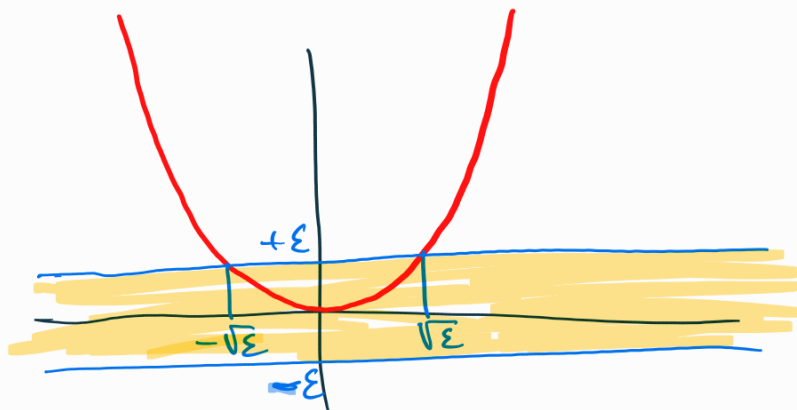
Verifica:

Fissiamo  $\varepsilon > 0$  arbitrario, cerchiamo  $\delta > 0$  t.c.

$$|x^2 - 0| < \varepsilon \quad \forall x \text{ verificante } 0 < |x - 0| < \delta$$

Fix  $\varepsilon > 0$ , cerco  $\delta > 0$  t.c.  $x^2 < \varepsilon \quad \forall x$  verificante  
 $|x| < \delta$

$$x^2 < \varepsilon \iff |x| < \sqrt{\varepsilon} =: \delta$$



OSS se fosse  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0, \end{cases}$

si avrebbe comunque

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

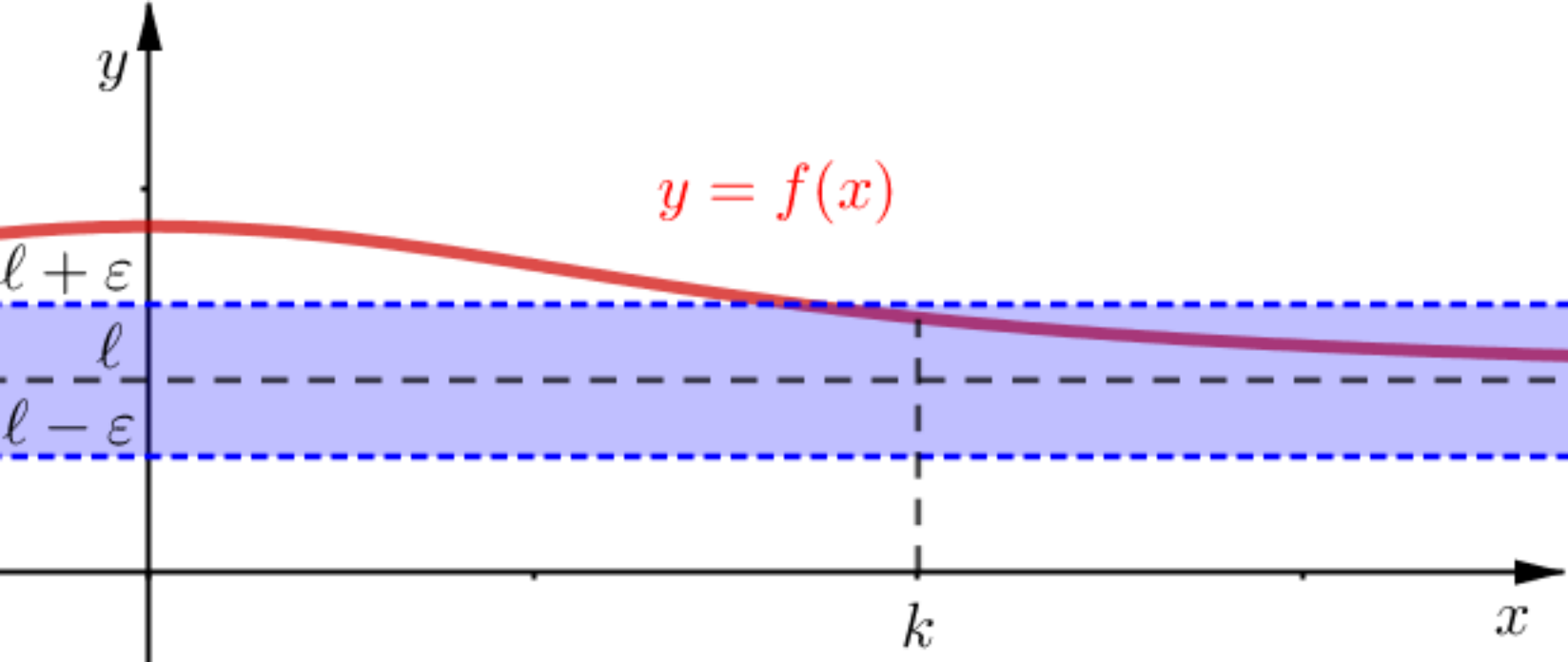
2° caso  $x_0 = +\infty$ ,  $l \in \mathbb{R}$ . (contiene i limiti di succ<sup>m</sup>)

$V$  sarà della forma  $B_\varepsilon(l) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon) = \{y : |y - l| < \varepsilon\}$

$U$  sarà della forma  $B_k(+\infty) = (k, +\infty)$

La def<sup>ne</sup> diventa:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  se e solo se.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{R}$  t.c.  $|f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in X$  verificante  
 $x > k$ .



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-6}} = 0$$

$$x_0 = +\infty, \quad l = 0$$

$$X = (6, +\infty)$$

Verifico:

$\forall \varepsilon > 0$  cerco  $K$  t.c.

$$\frac{1}{\sqrt{x-6}} < \varepsilon$$

$\forall x \in X$  t.c.

$$x > K.$$

$$\frac{1}{\sqrt{x-6}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{x-6} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x-6 > \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$\Downarrow$

$$x > 6 + \frac{1}{\varepsilon^2} =: K$$