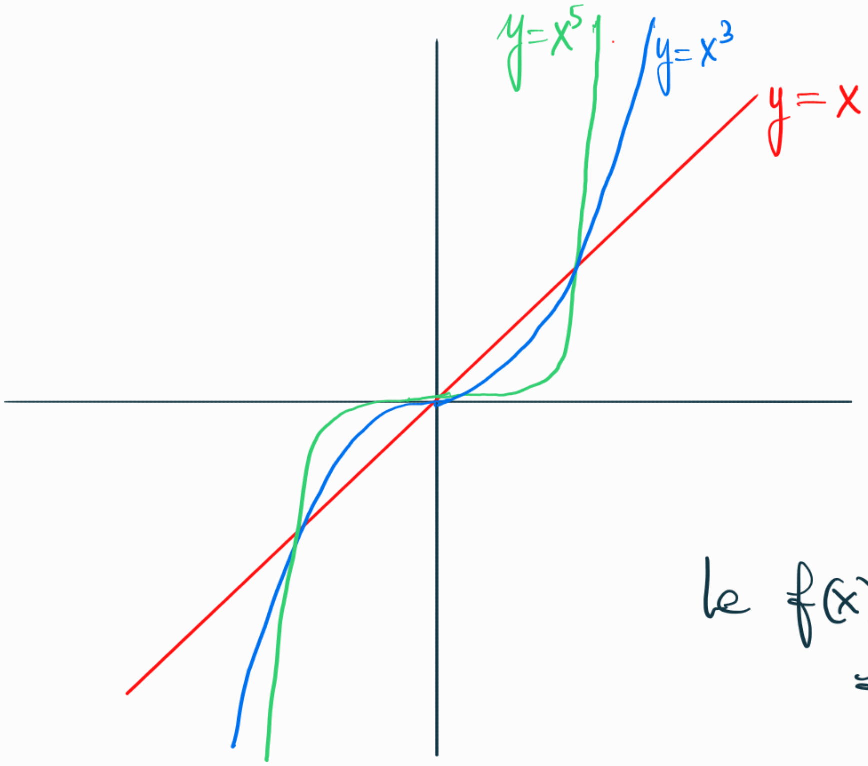
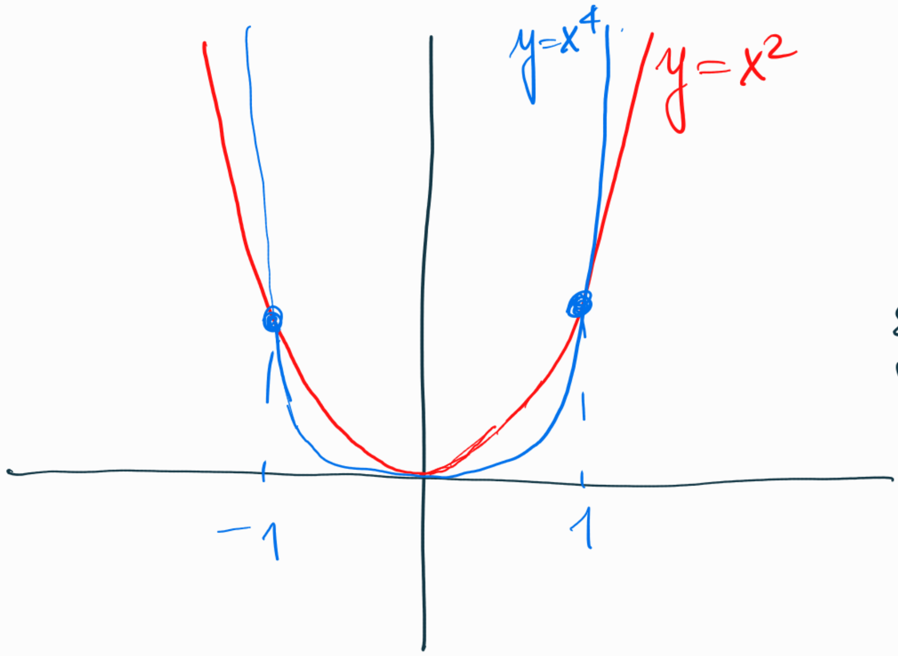


$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}_+$
n dispari.

f è strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$

le $f(x)$ sono dispari, cioè
$f(-x) = -f(x)$



$f(x) = x^n, \; n \in \mathbb{N}^+$
n pari.

strett. crescente in $[0,+\infty)$
strett. decrescente in $(-\infty,0]$

f è pari, cioè
$f(-x) = f(x) \; \forall x \in \mathbb{R}$

Potenze con esponente intero negativo.

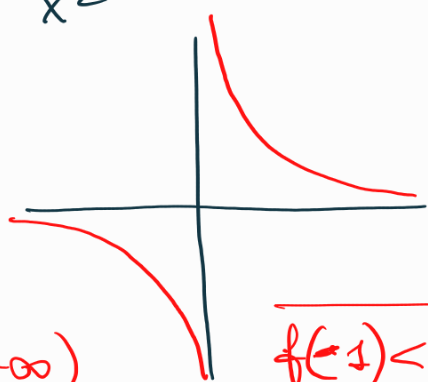
$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad n \in \mathbb{N}_+$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x} \qquad x^{-2} = \frac{1}{x^2} \qquad x \neq 0$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

strett. decrescente in $(0,+\infty)$
e anche in $(-\infty,0)$
ma non in $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$

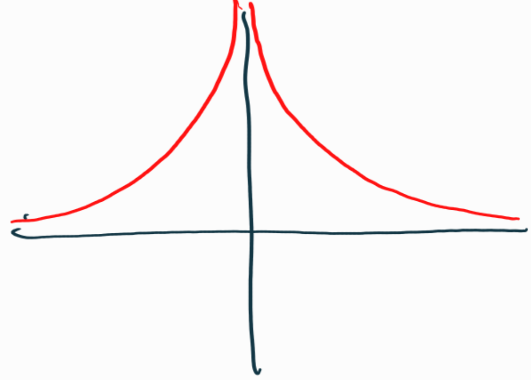
dispari



$\boxed{f(-1) < f(1)}$

$f(x)=\frac{1}{x^2}$

pari



Vorrei definire x^α con α razionale.

$x^{1/2}$ $x^{1/3}$ $x^{1/4}$ $x^{1/n}$ $n\in\mathbb{N}_+$

$f: X \longrightarrow Y$ è $\boxed{\text{iniettiva}}$

se (equivalentemente)

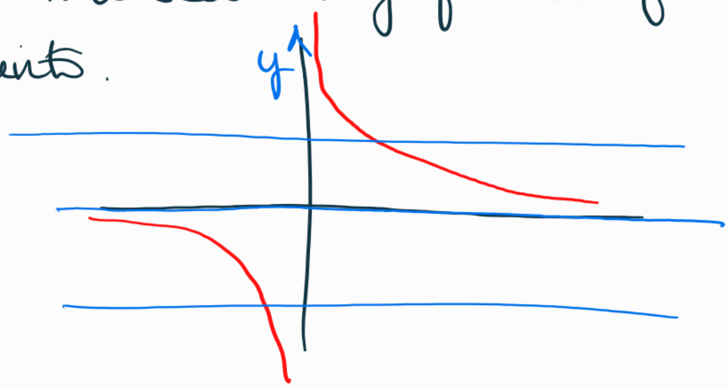
1) comunque presi $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$.

2) Se $x_1, x_2 \in X$ e $f(x_1)=f(x_2)$, allora $x_1 = x_2$.

3) $\forall y \in Y$ esiste al più un elemento $x\in X$ t.c. $f(x)=y$.

4) $\forall y\in Y$ l'eq^{ne} $f(x)=y$ ha al più una soluzione $x\in X$.

5) Per funzioni reale di variabile reale: $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, ogni retta orizzontale interseca il grafico di f in al più un punto.



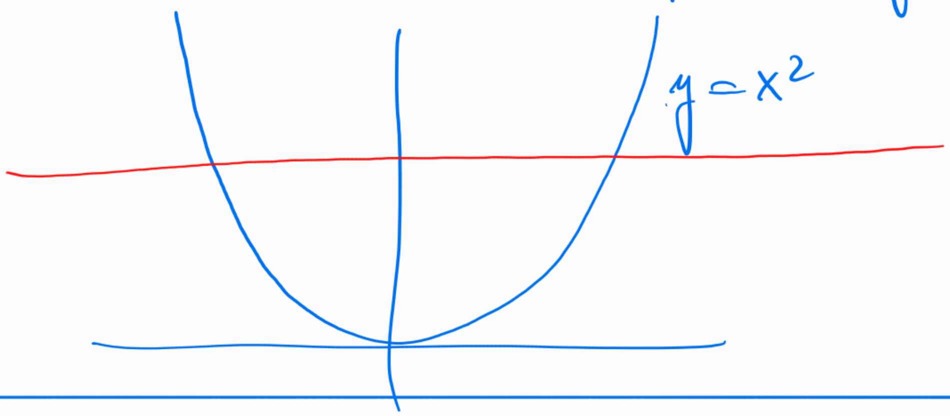
$f(x)=\frac{1}{x}$
è iniettiva.

OSS Se f è strett. monotòna (strett. cresc. o decrescente) allora è iniettiva.

Per es. se f è strettamente crescente

se $x_1 \neq x_2$, allora se $x_1 < x_2 \xRightarrow{f \text{ strett crescente}} f(x_1) < f(x_2)$

$f(x) = x^2$ non è iniettiva perché $f(-2) = f(2) = 4$



$f: X \to Y$ si dice $\boxed{\text{suriettiva}}$ se

1) $\forall y \in Y \quad \exists$ almeno $x \in X$ t.c. $f(x) = y$.

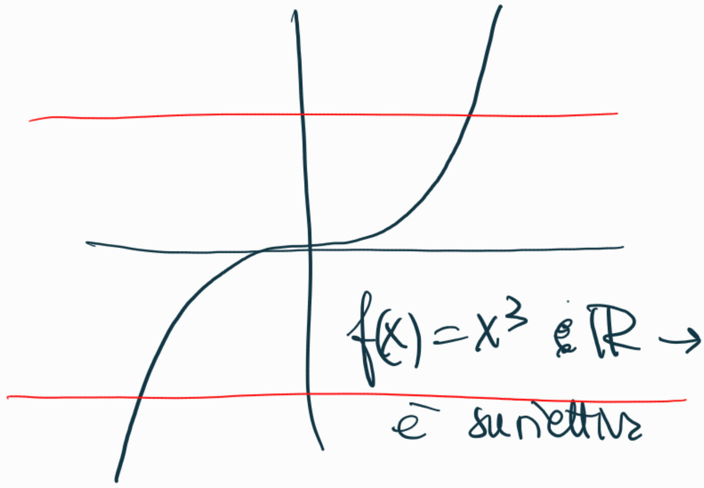
2) "ogni elemento di Y" "proviene" da almeno un pto $x \in X$.

3) $\forall y \in Y$ l'eq^{ne} (nella variabile x)
$f(x) = y$ ammette almeno una sol^{ne} $x \in X$.

4) L'insieme di arrivo coincide con l'immagine di f

dove $\operatorname{im} f = \{y \in Y : \exists x \in X \text{ verificante } f(x) = y\} =$
$= \{f(x) : x \in X\}$

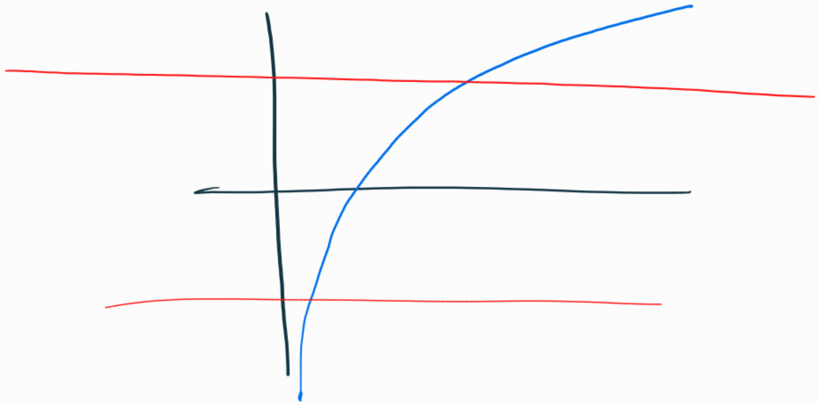
5) Ogni retta orizzontale interseca il grafico di f in almeno un punto.



$f(x)=x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

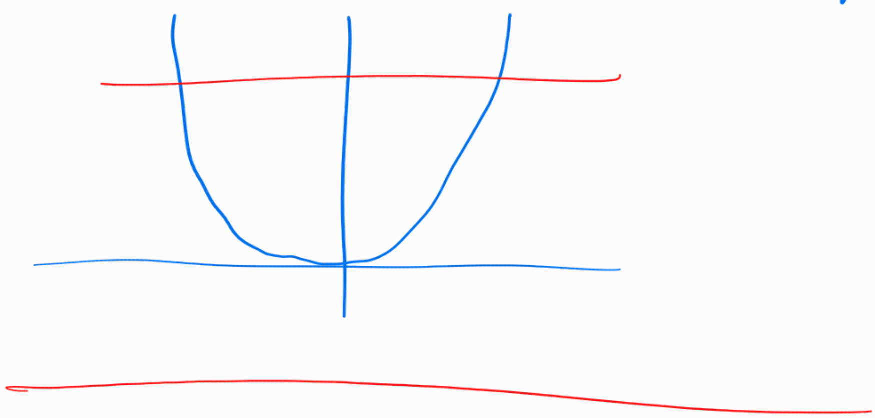
è suriettiva

$f(x)=\log x : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è suriettiva



$f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è suriettiva

perché non assume valori negativi



$f(x)= x^2 : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ è suriettiva

OSS Una funzione non suriettiva si può rendere suriettiva restringendo l'insieme di arrivo all'immagine.

$\boxed{f(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ è suriettiva.}}$

Il modo più semplice per provarlo è usare un teorema di analisi.

"Una funzione continua in un intervallo assume tutti i valori compresi tra $\inf f$ e $\sup f$".

$f(x) = x^3$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$

$\overset{\text{Thm}}{\Longrightarrow}$ assume tutti i valori compresi tra

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} x^3 = -\infty \quad e \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} x^3 = +\infty .$$

$f: X \to Y$ si dice $\boxed{\text{biiettiva}}$ se

è iniettiva e suriettiva, cioè se

1) $\forall y \in Y \quad \exists!\ x \in X$ t.c. $f(x) = y$.

2) $\forall y \in Y$ l'eq.ne (in $x \in X$) $f(x) = y$ ha esattamente una soluzione x

3) ogni retta orizzontale interseca il grafico di f in un solo punto.

$$f(x): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^3$$

- è suriettiva
- è iniettiva? sì perché è strettamente crescente. $\Big| \Rightarrow$ biiettiva

Se $f: X \to Y$ è biiettiva,

resta definita la funzione inversa

$$f^{-1}: Y \longrightarrow X$$
$$y \longmapsto \text{l'unico } \underset{\underset{f^{-1}(y)}{\shortparallel}}{x} \in X \text{ t.c. } f(x) = y.$$

f biiettiva

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

e anche f^{-1} è biiettiva. $(f^{-1})^{-1} = f$.

L'inversa di $f(x) = x^3$ è la funzione

$$\underset{\underset{\sqrt[3]{y}\, =\, y^{1/3}}{\shortparallel}}{f^{-1}(y)} = x \iff x^3 = y.$$

Questo procedimento si può ripetere per

$f(x) = x$, $\quad f^{-1}(y) = y$

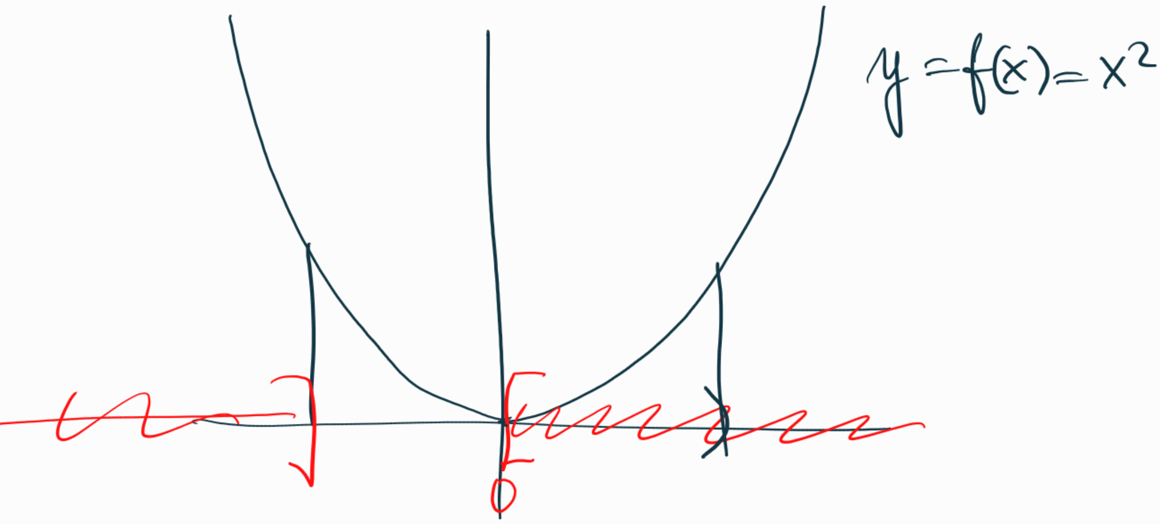
$f(x) = x^3$, $\quad f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} = y^{1/3}$

$f(x) = x^5$, $\quad f^{-1}(y) = \sqrt[5]{y} = y^{1/5}$

$f(x) = x^7$, $\quad f^{-1}(y) = \sqrt[7]{y} = y^{1/7}$

Abbiamo definito $x^{\frac{1}{n}}$ $\forall n$ dispari, positivo

$f(x) = x^2 : \mathbb{R} \to \cancel{\mathbb{R}}$ $[0,+\infty)$ non è né iniettiva né suriettiva



Per recuperare l'iniettività, posso restringere il dominio a $[0,+\infty)$

ma potrei restringerlo a $(-\infty,0]$.

ma anche $(-\infty,-1] \cup [0,1)$

Scegliamo di restringere il dominio a $[0,+\infty)$.