

Infinito di ord. superiore risp. a n^2 , ma inferiore a n^α $\forall \alpha > 2$
 ord. sup. risp. a n , ma inf. a n^α $\forall \alpha > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2(\log n)^3 + n^{5/2} - n(\log n)^5}{\log(\log(2n)) + \sqrt{n} \sqrt{n^4 + \log n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{5/2}}{n^{5/2}} = 1$$

$$\text{Num} = n^{5/2} \left(1 + \frac{(\log n)^3}{\sqrt{n}} - \frac{(\log n)^5}{n^{3/2}} \right) = n^{5/2} (1 + o(1)) \sim n^{5/2}$$

$\downarrow 0$ $\downarrow 0$

Den

$$\sqrt{n} \sqrt{n^4 + \log n} = \sqrt{n} \sqrt{n^4 \left(1 + \frac{\log n}{n^4} \right)} \sim n^{5/2}$$

$\sim n^2$
 $\downarrow$
 $\sim n^2$

$$\log(2n) = \log n + \log 2 = \log n \left(1 + \frac{\log 2}{\log n} \right) =$$

$$= (\log n) (1 + o(1))$$

$$\log(\log(2n)) = \log(\log n (1 + o(1))) =$$

$$= \log(\log n) + \log(1 + o(1)) \sim \log(\log n)$$

$\parallel$
 $o(1)$

$$\text{Den} = n^{5/2} \left[\frac{\log \log(2n)}{n^{5/2}} + \frac{\sqrt{n} \sqrt{n^4 + \log n}}{n^{5/2}} \right] = n^{5/2} (1 + o(1)) \sim n^{5/2}$$

$\downarrow 0$ $\downarrow 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\log n)^n}{b^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log n}{b} \right)^n = +\infty$$

$$e^n \log \left(\frac{\log n}{b} \right) \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^{\sqrt{n}} - (\sqrt{n})^n \right)$$

$$\begin{aligned} n^{\sqrt{n}} - (\sqrt{n})^n &= e^{\sqrt{n} \log n} - e^{\overbrace{n \log \sqrt{n}}^{\frac{n}{2} \log n}} = \\ &= e^{\sqrt{n} \log n} - e^{\frac{n}{2} \log n} = \end{aligned}$$

Perché $\frac{n}{2} \log n$ "cresce di più" di $\sqrt{n} \log n$.
metto in evidenza $e^{\frac{n}{2} \log n}$

$$\begin{aligned} &= e^{\frac{n}{2} \log n} \left[e^{\underbrace{(\sqrt{n} \log n - \frac{n}{2} \log n)}_{\log n (\sqrt{n} - \frac{n}{2}) \rightarrow -\infty}} - 1 \right] = \\ &\quad \begin{array}{c} \downarrow +\infty \quad \downarrow -\infty \end{array} \\ &= \underbrace{e^{\frac{n}{2} \log n}}_{\downarrow +\infty} \left[\underbrace{-1 + o(1)}_{\downarrow -1} \right] \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

OSS $a_n - b_n$

a_n e $b_n \rightarrow +\infty$

se b_n è infinito di ordine sup. risp. a a_n .

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= \underbrace{b_n}_{\downarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{a_n}{b_n}}_{\downarrow 0} - 1 \right) \rightarrow -\infty \\ &\quad \downarrow \\ &\quad -1 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n} = ((+\infty)^0) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\boxed{\frac{1}{n} \log n}} = e^0 = 1$$

$\downarrow$
 0 gerarchie d'infinito

$$\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{3n^7 - n^5 + 5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (3n^7 - n^5 + 5)^{\frac{1}{n}} = ((+\infty)^0) =$$

$$= \lim_n \left(n^7 \left(3 - \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^7} \right) \right)^{1/n} =$$

$$= \lim_n \underbrace{n^{7/n}}_{\downarrow} \underbrace{\left(3 - \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^7} \right)^{1/n}}_{\downarrow 1}$$

$$\underbrace{(n^{1/n})^7}_{\downarrow 1^7 = 1}$$

In questo modo si dimostra che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{P_k(n)} = 1 \quad \forall P_k(n) \text{ polinomio di grado } k \text{ con termine } a_k > 0$$

Sotto successioni (o successioni estratte).

DEF Data una successione $\{a_n\}$, si dice sottosuccessione di $\{a_n\}$ una successione della forma $b_n = a_{k_n}$, dove $\{k_n\}$ è una successione strettamente crescente di interi naturali.

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

$$\rightarrow a_{2n} = \frac{1}{2n} \quad (k_n = 2n) \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$$

$$\rightarrow a_{2n-1} = \frac{1}{2n-1} \quad (k_n = 2n-1) \quad 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$$

$$\rightarrow a_{n^2} = \frac{1}{n^2} \quad (k_n = n^2) \quad 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$$

$$a_{k_n} \quad (k_n \text{ è la successione dei numeri primi}) \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \dots$$

In pratica una sottosuccessione è una successione che si ottiene da quella di partenza cancellando dei termini, anche in numero infinito.
Le seguenti due non sono sottosucc^{he} di $a_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \dots$$

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \dots$$

PROP Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}^*$, allora ogni sottosuccessione di $\{a_n\}$ tende ancora a l .

Dim. ^{Hyp} ~~#~~ $a_n \rightarrow l \Rightarrow$

Hyp $\forall$ intorno U di l $\exists h$ t.c. $a_n \in U \quad \forall n > h$

Tesi: $a_{k_n} \rightarrow l$. Devo provare che

Th $\forall$ intorno U di l . $\exists \bar{h}$ t.c. $a_{k_n} \in U \quad \forall n > \bar{h}$

Oss che k_n è una succ^{te} di interi natur. strett. crescente $\Rightarrow k_n \geq n$

se $n > h \Rightarrow k_n \geq n > h \xRightarrow{\text{Hyp}} a_{k_n} \in U$

□

Applicazione Per dim. che una successione non ha limite basta trovare due sottosucc^{te} che ammettono limiti diversi.

$a_n = (-1)^n$ non ha limite.

Per vedere questo osservo che

$$\left. \begin{array}{l} a_{2n} = (-1)^{2n} \equiv 1 \rightarrow 1 \\ a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} \equiv -1 \rightarrow -1 \end{array} \right\} \Rightarrow a_n \text{ non ha limite.}$$

$a_n = (-1)^n (n^2 - 5)$ non ha limite.

$$\left. \begin{array}{l} a_{2n} = ((2n)^2 - 5) \rightarrow +\infty \\ a_{2n-1} = -((2n-1)^2 - 5) \rightarrow -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow a_n \text{ non ha limite.}$$

Se $\exists$ una sottosuccessione t.c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{k_n} = l$,

cosa posso dire di $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$?

Non è detto che esista $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, ma se esiste vale l .

PROP. Supponiamo che ci siano due sottosucceⁿⁱ di $\{a_n\}$, dette $\{a_{k_n}\}, \{a_{h_n}\}$ (dove k_n e h_n sono succeⁿⁱ strett. crescenti di interi naturali t.c.

$$\{k_n\} \cup \{h_n\} = \mathbb{N}.)$$

per es. $k_n = 2n, h_n = 2n+1$,

e supponiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{k_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{h_n} = l$.

Allora tutta la succeⁿⁱ $\{a_n\}$ tende a l ,

$$\text{cioè } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l.$$

Applicazione:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - (-1)^n n}{3n^2 + (-1)^n (n+7)}$$

a_n

$$a_{2n} = \frac{4n^2 - 2n}{12n^2 + 2n + 7} \longrightarrow \frac{1}{3}$$

$$a_{2n+1} = \frac{(2n+1)^2 + 2n+1}{3(2n+1)^2 - (2n+1) - 7} \longrightarrow \frac{1}{3}$$

Sappiamo che una succeⁿⁱ convergente è limitata.

Il viceversa è falso (es. $(-1)^n$ è limitata ma non converge)

Il prox. teorema ci dice che una successione limitata "è convergente pur di estrarre una sottosucc^{ne}"

Teorema di Bolzano-Weierstrass.

Sia $\{a_n\}$ una succ^{ne} limitata. Allora esiste una sottosucc^{ne} $\{a_{k_n}\}$ convergente.

Es. 1 $a_n = (-1)^n$ è limitata. Non è convergente.
Ma posso estrarre la sottosucc^{ne} $a_{2n} \equiv 1$, che è convergente.

Es. 2 $a_n = \sin n$, è limitata. Abbiamo già visto che non ammette limite.

Il teor. di BW ci garantisce che esiste una sottosucc^{ne} convergente.

PROP. Ogni succ^{ne} di numeri reali ammette una sottosucc^{ne} monotona (o crescente o decrescente)
(da dim. dopo)

Dim. B-W. Dalla succ^{ne} limitata $\{a_n\}$ posso estrarre (per la prop) una sottosucc^{ne} $\{a_{k_n}\}$ monotona.

Supponiamo, per es. che sia crescente

$\{a_{k_n}\}$ crescente

$\{a_{k_n}\}$ è limitata (perché lo è $\{a_n\}$)

Teor. succ^{ne} monotone

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = \sup a_{k_n} \in \mathbb{R}$$

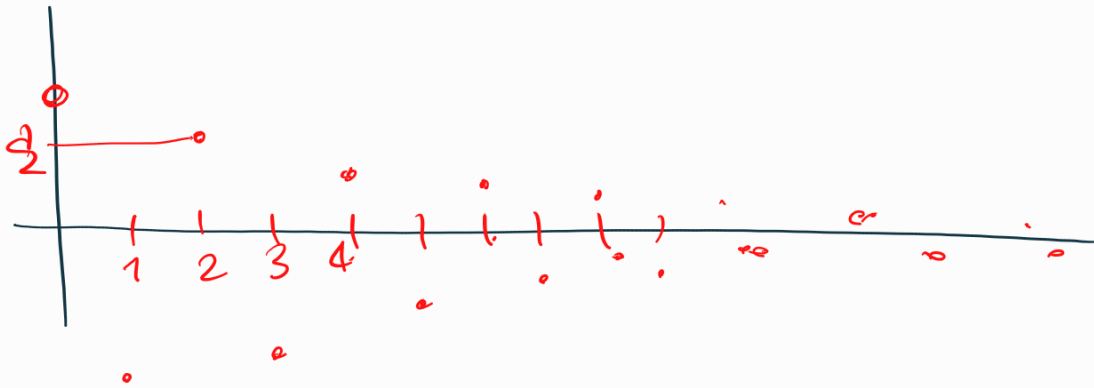
se invece $\{a_{k_n}\}$ è decrescente, convergerà a $\inf a_{k_n}$.

□

PROP. Ogni succ^{ne} di numeri reali ammette una sotto succ^{ne} monotona (o crescente o decrescente)

Dm
Sia $\{a_n\}$ una succ^{ne} fissata.

Diremo che un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ è un "picco" per $\{a_n\}$
se $a_{n_0} \geq a_n \quad \forall n \geq n_0$



2 possibilità:

1) i picchi sono infiniti.

In questo caso se prendo

$\{a_{k_n}\}$, dove $\{k_n\}$ è la succ^{ne} dei picchi,
la succ^{ne} è decrescente

Infatti $a_{k_n} \geq a_{k_{n+1}}$ perché k_n è un picco.

2) i picchi sono in numero finito (o nulla)

Vuol dire $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ t.c. tutti i picchi sono $< k_0$

k_0 non è un picco $\Rightarrow \exists k_1 > k_0$ t.c. $a_{k_1} > a_{k_0}$

$\Rightarrow$ nemmeno k_1 è un picco $\Rightarrow \exists k_2 > k_1$ t.c. $a_{k_2} > a_{k_1}$

In questo modo costruisco una sottosucc^{ne} a_{k_n}
strett. crescente.

□

