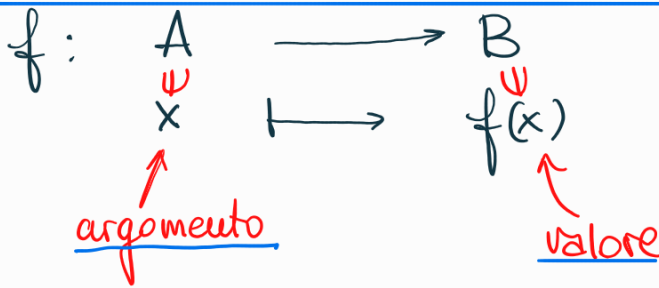


Potenze con esponente intero positivo.

Funzioni.

Una funzione f è una legge che associa univocamente ad ogni elemento x di un insieme A (detto **dominio**) un elemento $f(x)$ di un insieme B (detto **codominio**)
(l'insieme di arrivo)

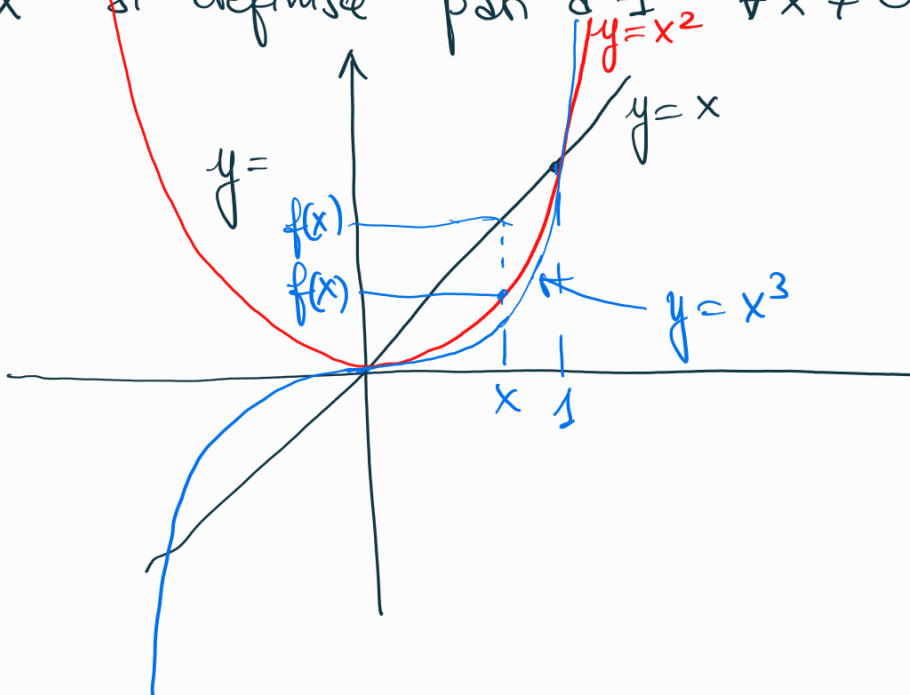


$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^3 = x \cdot x \cdot x$$

Consideriamo

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n$$

x^0 si definisce pari a 1 $\forall x \neq 0$



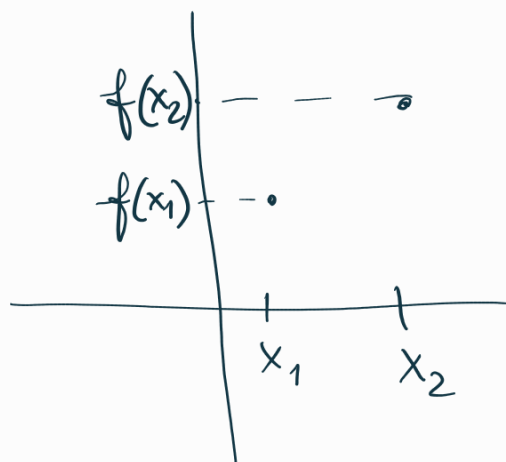
DEF Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

$f: A \rightarrow B$ si dice crescente
decrecente se

$\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$
>

f si dice strett. crescente
decrecente se

$\forall x_1, x_2 \in A$ t.c. $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$
>



Prop. sia $n \in \mathbb{N}_+$. Sia $f(x) = x^n$.

Allora $f(x) = x^n$ è strett. crescente in $[0, +\infty)$, cioè

$\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ t.c. $x_1 < x_2$ si ha $x_1^n < x_2^n$.

Dim.

$n=1$: $0 \leq x_1 < x_2 \xRightarrow{?} f(x_1) \stackrel{?}{<} f(x_2)$ banale

$n=2$: $0 \leq x_1 < x_2 \xRightarrow{?} x_1^2 \stackrel{?}{<} x_2^2$

$x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow x_2^2 - x_1^2 > 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \underbrace{(x_2 + x_1)}_{>0} > 0$ Vero!

$$n=3: 0 \leq x_1 < x_2 \stackrel{?}{\Rightarrow} x_1^3 < x_2^3$$

$$x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow x_2^3 - x_1^3 > 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \underbrace{(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)}_{>0} > 0$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$n \text{ generico } 0 \leq x_1 < x_2 \stackrel{?}{\Rightarrow} x_1^n < x_2^n$$

$$x_1^n < x_2^n \Leftrightarrow x_2^n - x_1^n > 0 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \underbrace{(x_1^{n-1} + x_1^{n-2} x_2 + x_1^{n-3} x_2^2 + \dots + x_2^{n-1})}_{>0} > 0$$

Il comportamento di $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}_+^*$)
per $x \leq 0$ è completamente diverso per n pari e
 n dispari.

1) caso n pari $n = 2, 4, 6, \dots$

Def. una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
si dice pari se

- $x \in \text{dom } f = A \Rightarrow -x \in \text{dom } f = A$
- $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in A$

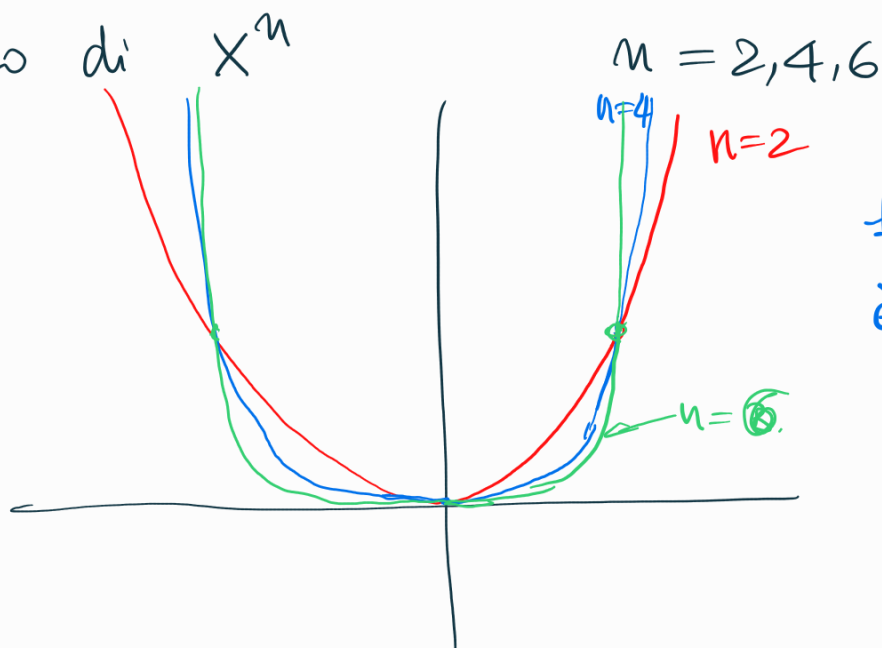
$$\text{Se } f(x) = x^2 \Rightarrow (-x)^2 = x^2 \quad (-x)^n = x^n \text{ se } n \text{ è pari.}$$

$$(-x)^4 = x^4$$

Esempi di funzioni pari: $\cos x$, $|x|$, $\frac{1}{x^2}$,

$$\frac{\sin x}{x}, \quad x \sin x, \quad x^2 \cos x.$$

Grafico di x^n



$f(x) = x^n$ (n pari)
 è una funzione
 pari
 $(-x)^n = x^n$

Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y .

Cos'è il grafico di una funzione?

A, B insiemi qualsiasi.

definiamo

$A \times B$

prodotto cartesiano

come

$$A \times B = \{ (x, y) \text{ dove } x \in A, y \in B \}$$

nel caso in $A = B$

scriviamo

$$A^2 \text{ al posto di } A \times A$$

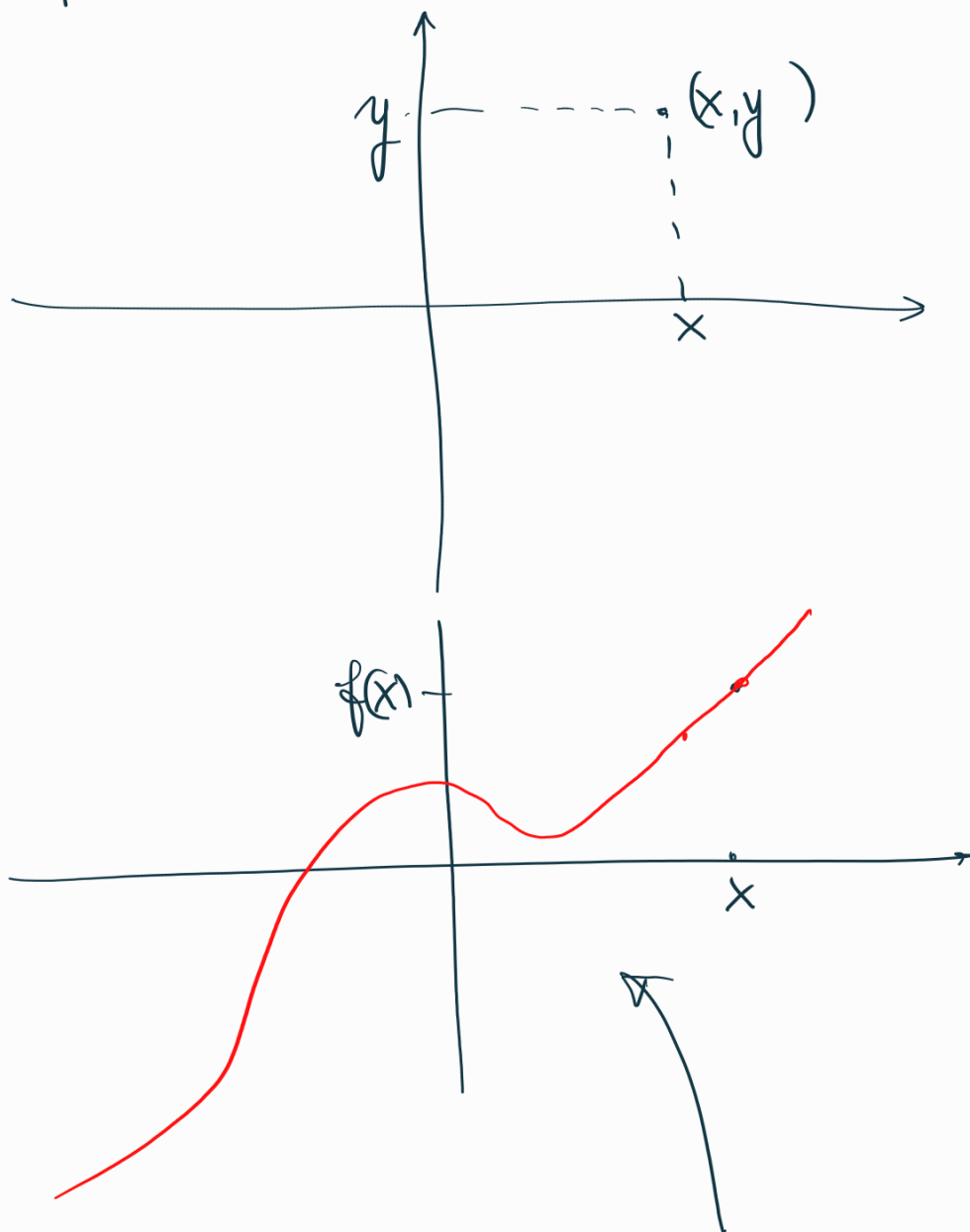
$$\{ (x, y) : x \in A, y \in A \}$$

Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione

$$\begin{aligned} \text{graf } f &= \{ (x, y) \in A \times B \text{ t.c. } y = f(x) \} = \\ &= \{ (x, f(x)) \text{ t.c. } x \in A \}. \end{aligned}$$

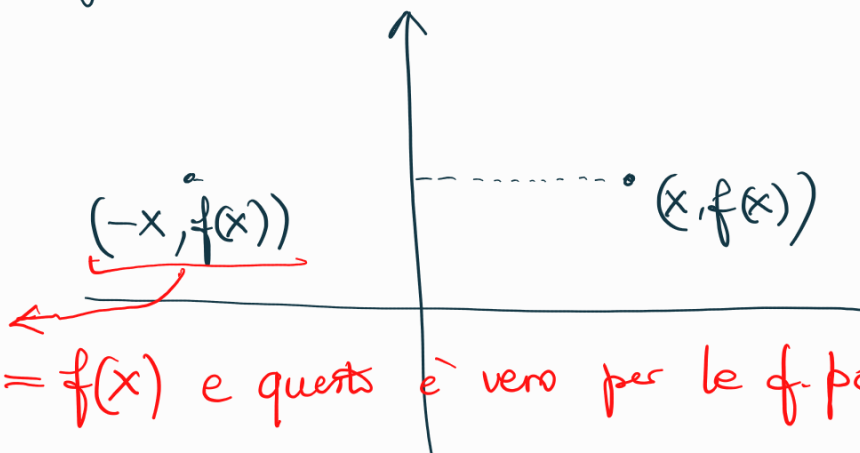
se A, B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$,
 $A \times B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

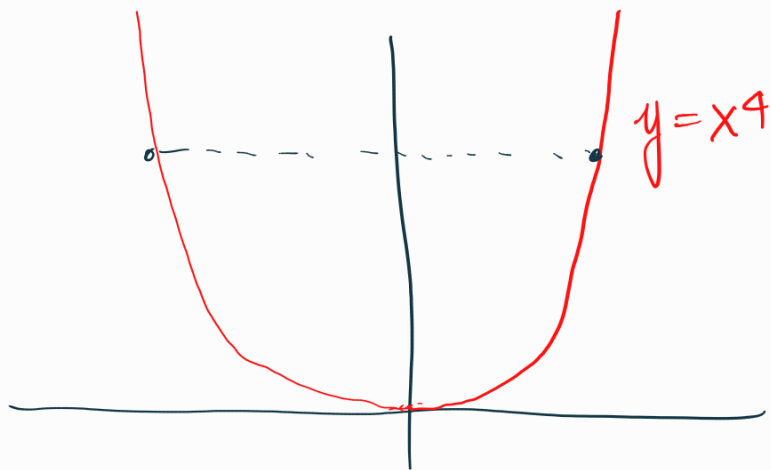
Ma gli elementi di $\mathbb{R}^2$ si rappresentano graficamente
sul piano cartesiano



OSS se f è pari, il grafico di f è simmetrico
rispetto all'asse y .

appartiene al grafico
se e solo se $f(-x) = f(x)$ e questo è vero per le f pari





x^n con n pari ≥ 0 .

è strett. crescente in $[0, +\infty)$

e strett. decrescente in $(-\infty, 0]$

Siano $x_1 < x_2 \leq 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} x_1^n > x_2^n$

$$\begin{array}{ccc} x_1^n > x_2^n & \Leftrightarrow & (-x_1)^n > (-x_2)^n \\ \text{"} & & \text{"} \\ (-x_1)^n & & (-x_2)^n \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{oss } 0 \leq -x_2 < -x_1 \Rightarrow (-x_2)^n < (-x_1)^n \end{array}$$

se invece $n \in \mathbb{N}^+$ è dispari ($n = 1, 3, 5, \dots$)

la funzione $f(x) = x^n$ è dispari, cioè

- $x \in \text{dom } f \Rightarrow -x \in \text{dom } f$.
- $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \text{dom } f$.