

Confronto tra potenze ed esponenziali

n^α (con $\alpha > 0$) e b^n (con $b > 1$) sono entrambi infiniti.

PROP 1 Siano $b > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^n}{n^\alpha} = +\infty \quad \left(\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{b^n} = 0 \right)$$

OSS Il risultato è ovvio se $\alpha \leq 0$
(se $\alpha < 0$ $\frac{b^n}{n^\alpha} \rightarrow \left(\frac{+\infty}{0^+} \right) = +\infty$)

OSS se $b > 1$, $\alpha > 0$, la prop. dice che

b^n è un infinito di ordine superiore rispetto a n^α
ossia

"gli esponenziali (con base > 1) battono le potenze".

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n - n^2}{n^7 - 2n^5 + 5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n^7} = +\infty$$

Annotations: $3^n \sim 3^n$, $n^7 - 2n^5 + 5 \sim n^7$, $3^n \gg n^7$, 3^n è di ordine superiore rispetto alla potenza.

$$3^n - n^2 = (+\infty - \infty) = 3^n \left(1 - \frac{n^2}{3^n} \right) = 3^n (1 + o(1)) \sim 3^n$$

Annotation: $\frac{n^2}{3^n} \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 2^n}{3^n} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{\left(\frac{3}{2} \right)^n}$$

Annotations: $\frac{n^2 2^n}{3^n} \sim \frac{n^2}{(3/2)^n}$, $\frac{3}{2} > 1$

Corollario: se $0 < b < 1$, $\alpha > 0$

$$n^\alpha b^n \rightarrow 0$$

$$\frac{n^\alpha}{(1/b)^n}$$

OSS $1/b > 1$

Dim. prop. Sia $b > 1$, sia $\alpha > 0$ (gli altri casi sono banali)

Voglio provare che $\frac{b^n}{n^\alpha} \rightarrow +\infty$.

Usiamo il seguente risultato (da provare in seguito):

Criterio del rapporto per successioni

Sia $\{a_n\}$ una succ^{ne} a termini positivi t.c

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l. \text{ Allora:}$$

$$1) \text{ se } l \in [0, 1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

$$2) \text{ se } l \in (1, +\infty] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

OSS questo criterio non dice nulla se $l = 1$.

$$\frac{b^n}{n^\alpha} =: a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \cdot \frac{n^\alpha}{b^n} \rightarrow b > 1$$

$$\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \rightarrow 1^\alpha = 1$$

Per il criterio del rapporto, $a_n = \frac{b^n}{n^\alpha} \rightarrow +\infty$. $\square$

Voglio sostituire n con una qualsiasi successione $c_n \rightarrow +\infty$

PROP 2 Siano adesso $\boxed{c_n \rightarrow +\infty}$, $b > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^{c_n}}{(c_n)^\alpha} = +\infty.$$

(ovvero se $\alpha \leq 0$
come prima)

Dmn si usa la prop. 1 e la parte intera $\lfloor x \rfloor$

$$\begin{aligned} \frac{b^{c_n}}{(c_n)^\alpha} &\stackrel{b>1}{\geq} \frac{b^{\lfloor c_n \rfloor}}{(c_n)^\alpha} \geq \frac{b^{\lfloor c_n \rfloor}}{(c_n)^\alpha} \stackrel{\alpha>0}{\geq} \frac{b^{\lfloor c_n \rfloor}}{(\lfloor c_n \rfloor + 1)^\alpha} = \frac{b^{\lfloor c_n \rfloor}}{(\lfloor c_n \rfloor + 1)^\alpha} \stackrel{\alpha'>1}{\rightarrow} +\infty \\ &= \frac{b^{\lfloor c_n \rfloor}}{(\lfloor c_n \rfloor)^\alpha} \cdot \frac{(\lfloor c_n \rfloor)^\alpha}{(\lfloor c_n \rfloor + 1)^\alpha} \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad \square$$

prop 1 $\downarrow$ perché $\lfloor c_n \rfloor \rightarrow +\infty$ ed è costituito da interi $+ \infty$

PROP 3 (confronto tra logaritmi e potenze)

Siano $b > 1$, $\alpha > 0$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_b n}{n^\alpha} = 0$$

Dmn

$$\frac{\log_b n}{n^\alpha} = \frac{\log_b n}{b^{\alpha \log_b n}} =$$

$$\log_b n = c_n \rightarrow +\infty$$

$$= \frac{c_n}{b^{\alpha c_n}} = \frac{c_n}{(b^\alpha)^{c_n}} \xrightarrow{\text{prop. 2}} 0 \quad \square$$

$b^\alpha > 1$ ok perché $b > 1, \alpha > 0$

Riassumendo: Gli esponenziali (con base > 1) sono infiniti di ordine superiore rispetto a ogni potenza.

I logaritmi sono infiniti di ordine inferiore rispetto a ogni potenza (con esponente > 0).

oss Sia ora $0 < b < 1, \alpha > 0$

$$\frac{\log_b n}{n^\alpha} = -\frac{\log_{1/b} n}{n^\alpha} \xrightarrow{1/b > 1} 0$$

$\log_b n \xrightarrow{+ \infty}$

$\text{oss } \log_b x = -\log_{1/b} x$

oss Questo vale anche se al posto di n ci mettiamo $c_n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_b(c_n)}{(c_n)^\alpha} = 0$$

Def Fattoriale.

Sia $n \in \mathbb{N}$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

se $n \in \mathbb{N}_+$

$$0! = 1$$

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120$$

PROP 4

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{b^n} = +\infty$$

$\forall b > 1$
(ovvero se $0 < b \leq 1$)

Dim

Poniamo

$$a_n = \frac{n!}{b^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\overset{(n+1)}{\cancel{n!}}}{b^{n+1}} \cdot \frac{1}{\cancel{n!}} = \frac{n+1}{b} \rightarrow +\infty$$

$$(n+1)! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}_{n!} (n+1) = (n+1)n!$$

Per il criterio del rapporto, $a_n \rightarrow +\infty$

n^n batte $n!$

PROP 5

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$

Dim

$$a_n = \frac{n^n}{n!}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 1 \end{aligned}$$

(Criterio)
 $\Rightarrow$

$$a_n \rightarrow +\infty$$

□

Esercizio confrontare gli infiniti n^n e $(2n)!$

$$a_n = \frac{n^n}{(2n)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+1)(2n+2) n^n} =$$

$(2n)!(2n+1)(2n+2)$
 $\frac{2(n+1)}{2(n+1)}$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n} \frac{1}{2(2n+1)} \rightarrow 0 < 1$$

$\downarrow$
 e

$$\Rightarrow a_n \rightarrow 0, \text{ cioè } \frac{n^n}{(2n)!} \rightarrow 0$$

cioè $(2n)!$ è un infinito di ordine superiore rispetto a n^n .

Formula di Stirling. (senza dim.)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Proviamo che $\frac{n!}{b^n} \rightarrow +\infty$ usando Stirling

$$\frac{n!}{b^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n} n^n}{b^n e^n} \geq \frac{n^n}{b^n e^n} = \left(\frac{n}{be}\right)^n > 2^n$$

$\downarrow$
 $2 \quad \text{def} \quad +\infty$

Gerarchie dei limiti

$$\log n < \sqrt{n} < n < n^2 < n^3 < \dots < n^{1000} < \dots < 2^n < 3^n < \dots < 1000^n < \dots < n! < n^n$$

Posso estenderla a destra.

$$n^n < n^{n+1} < (2n)^n$$

$$\frac{(2n)^n}{n^{n+1}} = \frac{2^n \cancel{n^n}}{\cancel{n^{n+1}}} \rightarrow +\infty$$

Posso estenderla a sinistra

$$\underbrace{\log(\log n)}_{\sqrt{\log(\log n)}} < (\log(\log n))^2 < \sqrt{\log n} < \log n < (\log n)^2$$

Oppure potrei fare uno zoom nella parte centrale

$$n < n \log \log n < n \log n < n (\log n)^2 < \dots < n^{1,001}$$

Confrontare i seguenti infiniti:

$$\log n, \quad \log_2 n, \quad \log(n^2), \quad \log(n^3)$$

sono tutti dello stesso ordine

$$\log(n^2) = 2 \log n$$

$$\log(n^3) = 3 \log n$$

$$\log_2 n = \frac{\log n}{\log 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n - 5n^2 \log n}{n^5 - n^2 2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{-n^2 2^n} = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3/2)^n}{n^2} = -\infty$$

$\sim 3^n$ (above 3^n)
 $-n^2 2^n$ (below $n^5 - n^2 2^n$)
 0 (below 2^n)

$$3^n - 5n^2 \log n = 3^n \left(1 - \frac{5n^2 \log n}{3^n} \right) \sim 3^n$$

$1 + o(1)$ (below the parentheses)

$$\frac{5n^2 \log n}{3^n} = \frac{5n^2 \log n}{n^3} \cdot \frac{n^3}{3^n} \rightarrow 0$$

0 (below $\frac{5n^2 \log n}{n^3}$)
 0 (below $\frac{n^3}{3^n}$)

$$n^5 - n^2 2^n = n^2 2^n \left(\frac{n^5}{n^2 2^n} - 1 \right) \sim -n^2 2^n$$

$\frac{n^5}{n^2 2^n}$ (circled)
 $\frac{n^3}{2^n} \rightarrow 0$ (below the circle)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^{\log_2 n}}{n} = l$$

$$\frac{5^{\log_2 n}}{n} = \frac{5^{\log_2 n}}{5^{\log_5 n}} = 5^{\log_2 n - \log_5 n} \rightarrow +\infty$$

0 (below $\log_2 n - \log_5 n$)

oppure

$$\frac{5^{\log_2 n}}{2^{\log_2 n}} = \left(\frac{5}{2} \right)^{\log_2 n} \rightarrow +\infty$$

$\downarrow$
 $+\infty$

$$\frac{5^{\log_2 n}}{n^3} = \frac{5^{\log_2 n}}{2^{3 \log_2 n}} = \left(\frac{5}{2^3} \right)^{\log_2 n} = \left(\frac{5}{8} \right)^{\log_2 n} \rightarrow 0$$