

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

• se $b_n \rightarrow \pm\infty$ $\left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \rightarrow e$ | già viste

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

• se $b_n \rightarrow \pm\infty$, $a \in \mathbb{R}$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{b_n}\right)^{b_n} = e^a$

1) $a > 0$ $\left(1 + \frac{a}{b_n}\right)^{b_n} = \left[\left(1 + \frac{1}{(b_n/a)}\right)^{\frac{b_n}{a}}\right]^a \rightarrow e^a$
 2) $a < 0$
 idem

(Note: A blue bracket under (b_n/a) points to $\pm\infty$, and a red arrow points from $\frac{b_n}{a}$ to $\pm\infty$)

3) $a = 0$

$$\left(1 + \frac{0}{b_n}\right)^{b_n} = 1 \rightarrow 1 = e^0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{n-4} = (1^{\pm\infty}) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{5}{n+2}\right)^{n+2} \right]^{\frac{n-4}{n+2}} = e^{-5} \cdot 1 = e^{-5}$$

(Note: A red bracket under $\left(1 - \frac{5}{n+2}\right)^{n+2}$ points to e^{-5} . A red circle around $\frac{n-4}{n+2}$ points to 1.)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2-3}{n^2}\right)^{1-3n} = (1^{-\infty}) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{3}{n^2}\right)^{n^2}}_{\downarrow e^{-3}} \underbrace{\left(\frac{1-3n}{n^2}\right)}_{\downarrow 0} = 1$$

• Sia $b_n \rightarrow \pm\infty$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \log \left(1 + \frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \log \underbrace{\left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n}}_{\downarrow e} = 1.$$

Esercizio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{(n^2-4)}_{\downarrow +\infty} \underbrace{\log \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}_{\downarrow \log 1 = 0} = (+\infty \cdot 0) = +\infty$$

$$(n^2-4) \cdot \log \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \underbrace{(n^2-4)}_{\downarrow +\infty} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n+1}\right) \log \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}_{\downarrow 1} \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n^3)}{1 + \log n} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = 3$$

$$\frac{\log(n^3)}{1 + \log n} = \frac{3 \log n}{1 + \log n} = \frac{3 \cancel{\log n}}{\cancel{\log n} (1 + o(1))} \rightarrow 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(e^n + 5)}{3n + 7} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) =$$

$$\log(e^n) + \log\left(1 + \frac{5}{e^n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(e^n \left(1 + \frac{5}{e^n}\right)\right)}{3n + 7} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \log\left(1 + \frac{5}{e^n}\right)}{3n + 7} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \left(1 + \frac{o(1)}{n}\right)}{n (3 + o(1))} = \frac{1}{3}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato la proprietà

$$\frac{o(1)}{n} = o(1)$$

Cosa significa?

se $a_n \rightarrow 0$, allora

$$\frac{a_n}{n} \rightarrow 0$$

Uso degli $o(1)$.

$$a_n = 5 + o(1) \quad \text{significa}$$

$$a_n \rightarrow 5$$



$$a_n = 5 + \text{succ}^{\text{ne}} \inf^{\text{ma}} \iff$$

$$a_n - 5 \rightarrow 0$$

$$\frac{3 + o(1)}{2 + o(1)} = \frac{3}{2} + o(1)$$

vuol dire:

$$\left. \begin{array}{l} \text{se } a_n \rightarrow 3 \\ b_n \rightarrow 2 \end{array} \right| \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{3}{2}$$

$$\frac{5 + o(1)}{n^2} = o(1)?$$

si

$n \rightarrow +\infty$

se $a_n \rightarrow 5$, allora $\frac{a_n}{n^2} \rightarrow 0$

$o(1) + o(1) = o(1)$? si, se sommo due succ^{te} infinitesime ottengo una succ^{te}

$o(1) \cdot o(1) = o(1)$? si

~~$$\frac{o(1)}{o(1)} = o(1)?$$~~

no! è falso che il rapporto di due succ^{te} infinitesime sia infinitesimo.

esempio $\frac{(1/n)}{(1/n^2)} = \frac{n^2}{n} \rightarrow +\infty$

$c \cdot o(1) = o(1)?$

$\forall c \in \mathbb{R}$

se $a_n \rightarrow 0$, allora $c \cdot a_n \rightarrow 0$ ok

$(n + o(1))^2 = n^2 (1 + o(1))$?

Devo provare: se $a_n \rightarrow 0$, allora

$$\frac{(n + a_n)^2}{n^2} \xrightarrow{?} 1$$

$$\left(\frac{n + a_n}{n}\right)^2 = \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^2 \rightarrow 1$$

~~$$(n + o(1))^2 = n^2 + o(1)$$~~

?

FALSA

$$(n + o(1))^2 - n^2 = o(1)$$

Si $a_n \rightarrow 0$, allora (?) $(n + a_n)^2 - n^2 \rightarrow 0$?

$$\cancel{n^2} + 2n \cancel{dn} + \cancel{dn^2} - \cancel{n^2} \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

NO se prendo (per es.) $dn = 1/n$

DEF Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ due succⁿⁱ def^{te} diverse da zero.
Diremo che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono **asintoticamente equiv.**
(per $n \rightarrow +\infty$) se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1, \text{ cioè } a_n = b_n (1 + o(1))$$

In tal caso scriveremo $a_n \sim b_n$

Per es.

$$2n^2 + 3n + 5 \sim 2n^2$$

$$\frac{n+1}{2n^2+5} \sim \frac{1}{2n}$$

Verifica:

$$\frac{\left(\frac{n+1}{2n^2+5} \right)}{1/(2n)} = \frac{2n(n+1)}{2n^2+5} \rightarrow 1$$

OSS Due succⁿⁱ asint. equivalenti hanno lo stesso limite? sì.

Il viceversa non è vero, per es.

n^2 e n hanno lo stesso limite, ma non sono asint. equiv.

$\frac{1}{n^2}$ e $\frac{1}{n}$ " " " " " "

Tuttavia se $a_n, b_n \rightarrow l \neq \{\pm\infty, 0\}$, allora sono asint. equiv.

Quando, in un limite, posso sostituire una succ^{ne} con una asintoticam. equivalente?

PROP. supponiamo $a_n \sim \bar{a}_n$, $b_n \sim \bar{b}_n$. Allora:

1) $\frac{a_n}{b_n} \sim \frac{\bar{a}_n}{\bar{b}_n}$

Dim.

$$\frac{(a_n/b_n)}{(\bar{a}_n/\bar{b}_n)} = \underbrace{\frac{a_n}{\bar{a}_n}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\bar{b}_n}{b_n}}_{\downarrow 1} \rightarrow 1$$

□

Esempio

$$\frac{3n^2 + 5n + 1}{n^2 - 7} \sim \frac{3n^2}{n^2} = 3$$

$\sim 3n^2$ $\sim n^2$

2) $a_n b_n \sim \bar{a}_n \bar{b}_n$

Dim.

$$\frac{a_n b_n}{\bar{a}_n \bar{b}_n} = \left(\frac{a_n}{\bar{a}_n} \right) \cdot \left(\frac{b_n}{\bar{b}_n} \right) \rightarrow 1$$

$\downarrow 1$ $\downarrow 1$

□

3) $(a_n)^r \sim (\bar{a}_n)^r \quad \forall r \in \mathbb{R}$

Dim.

$$\frac{(a_n)^r}{(\bar{a}_n)^r} = \left(\frac{a_n}{\bar{a}_n} \right)^r \rightarrow 1^r = 1$$

□

Attenzione in generale è errato sostituire succⁿⁱ asint. equiv. in una somma, in una differenza,

all'interno di funzioni, in composizione di funzioni.

Esempi

$$(n+1)^2 \sim n^2 \quad \text{OK.}$$

ma $(n+1)^2 - n^2 \sim \cancel{n^2 - n^2} = 0$ **FALSO**

$\underbrace{\quad}_{n^2}$

perché $(n+1)^2 - n^2 = \cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{n^2} \rightarrow +\infty$ **CORRETTO**

Invece si può sempre sostituire mantenendo $o(1)$.

$$(n+1)^2 = n^2 (1 + o(1)) \quad \text{vero}$$

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 (1 + o(1)) - n^2 = n^2 (\cancel{1} + o(1) - \cancel{1}) =$$
$$= n^2 \cdot o(1)$$

E' scorretto fare queste sostituzioni in una somma
anche se il risultato viene corretto

$$(2n+1)^2 - n^2 \sim \underbrace{4n^2 - n^2}_{4n^2} = 3n^2 \rightarrow +\infty \quad \leftarrow \text{vero}$$

questo passaggio non è corretto,

Invece è corretto usare il procedimento seguente:

$$(2n+1)^2 - n^2 = 4n^2 (1 + o(1)) - n^2 = n^2 \left[\underbrace{4(1 + o(1)) - 1}_3 \right] \rightarrow +\infty$$

Altro esempio

$$n^2 + n \sim n^2 \quad \text{vero!}$$

$\Rightarrow \cancel{e^{n^2+n} \sim e^{n^2}}$ **FALSO**

In fatti $\frac{e^{n^2+n}}{e^{n^2}} = e^n \rightarrow +\infty$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim 1$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim 1^n = 1 \quad \underline{\text{No}}$$

↓
e

Tuttavia anche in una somma/differenza può essere utile considerare le asintotiche equivalenti (senza sostituire!) per capire quali termini "contano di più"

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^3+1} - n \right) = (+\infty - \infty) =$$

$n^{3/2} \Rightarrow$ questo suggerisce di mettere in evidenza $n^{3/2}$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{n^{3/2}}_{+\infty} \left(\underbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}} - \frac{1}{\sqrt{n}}}_{1} \right) = +\infty$$

Esercizio dal libro.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x + n^{-4-x}}{n^{x-2} + n^6}$$

$x \in \mathbb{R}$

Num $n^x + n^{-4-x} \sim \begin{cases} n^x & x > -2 \\ 2n^{-2} & x = -2 \\ n^{-4-x} & x < -2 \end{cases}$

$$x > -4 - x \Leftrightarrow 2x > -4 \Leftrightarrow x > -2.$$

DEN. $n^{x-2} + n^6 \sim \begin{cases} n^{x-2} & x > 8 \\ 2n^6 & x = 8 \\ n^6 & x < 8 \end{cases}$

Se $x > 8 (\Rightarrow x > -2)$

$$\frac{n^x + n^{-4-x}}{n^{x-2} + n^6} \sim \frac{n^x}{n^{x-2}} = n^2 \rightarrow +\infty$$

e così via: se $x = 8 \dots$

se $-2 < x < 8 \dots$

(Completare l'esercizio)

Confronto tra infiniti.

Una succ^{ne} che tende a $\pm\infty$ si dice "un infinito".

Per es. $a_n = n$, $b_n = n^2 - n$, $c_n = -n^3 + 7$

Vogliamo chiarire come si confrontano tra loro infiniti diversi.

Situazione tipica: $a_n, b_n \rightarrow +\infty$. $\frac{a_n}{b_n}$

a_n "vuole mandare la frazione" a $+\infty$
 b_n " " " " " " " " a 0.

DEF siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ due succⁿⁱ tendenti a $+\infty$ opp. $-\infty$

Diremo che :

- $\{a_n\}$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $\{b_n\}$ se
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0 \quad (\text{opp. equivalentemente } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = +\infty)$$

A volte in questo caso scriveremo " $a_n \succ b_n$ " (per $n \rightarrow +\infty$)

Esempi: $n^2 \succ n+3$

- Diremo che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infiniti dello stesso ordine se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

cioè se $a_n \sim l b_n$

Esempio n^2 , $n^2 + 7n$ sono infiniti dello stesso ordine