

Fare esercizi 2.6.6 del libro di testo.

Oggi esercitazione alle 17:00 in aula 6.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{1}{3n}\right)^{n-5} = +\infty. \quad (\text{è del tipo } \lim_{n \rightarrow +\infty} (d_n)^{b_n})$$

$$\text{OSS} \quad \left(4 - \frac{1}{3n}\right)^{n-5} = 2^{\log_2 \left(4 - \frac{1}{3n}\right)^{n-5}} = 2^{\overbrace{(n-5) \log_2 \left(4 - \frac{1}{3n}\right)}^{+\infty}}$$

Mi chiedo quanto vale $\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{(n-5)}_{+\infty} \underbrace{\log_2 \left(4 - \frac{1}{3n}\right)}_{-\log_2(4) = 2 > 0} = +\infty$

~~E~~ se fosse

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n}\right)^{n-5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{\underbrace{(n-5) \log_2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n}\right)}_{-\infty}} = 0$$

$$\underbrace{(n-5)}_{+\infty} \underbrace{\log_2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n}\right)}_{\log_2 \left(\frac{1}{3}\right) < 0} \rightarrow -\infty$$

Si potrebbero anche risolvere così:

$$\underbrace{\left(4 - \frac{1}{3n}\right)}_{\substack{\text{VI defte} \\ 3}}^{n-5} \geq 3^{n-5} \rightarrow +\infty \quad (\text{e si può usare il thm. del carabinieri})$$

Anche nell'altro caso si poteva fare così.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} \right)^{n-5} = 0$$

$$0 < \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} \right)}_{\substack{\text{defte} \\ 1/2}}^{n-5} \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2} \right)}_{\text{defte}}^{n-5} \rightarrow 0 \quad (\text{di nuovo thm dei corab.})$$

Questo si può generalizzare

se $b_n \rightarrow +\infty$ e $a_n \rightarrow l$

$$(a_n)^{b_n} = 2^{\underbrace{b_n}_{\rightarrow +\infty} \underbrace{\log_2(a_n)}_{\rightarrow \log_2 l}} \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } l > 1 \\ 0 & \text{se } 0 \leq l < 1 \end{cases}$$

$\downarrow$
 $\begin{cases} +\infty & \text{se } l > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 \leq l < 1 \end{cases}$

In sintesi

$$l^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{se } l > 1 \\ 0 & \text{se } 0 \leq l < 1 \end{cases} //$$

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty //$$

E se $a_n \rightarrow l$, $b_n \rightarrow -\infty$?

$$(a_n)^{b_n} = 2^{b_n \log_2(a_n)} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } l > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 \leq l < 1 \end{cases}$$

$\downarrow$
 $\begin{cases} -\infty & \text{se } l > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 \leq l < 1 \end{cases}$

$$l^{-\infty} = \begin{cases} 0 & \text{se } l > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < l < 1 \end{cases}$$

$$(+\infty)^{-\infty} = 0$$

$l^{\pm\infty}$ è una forma indeterminata, nel senso che se $a_n \rightarrow l$ e $b_n \rightarrow \pm\infty$, può succedere di tutto

$$(a_n)^{b_n} = 2^{\underbrace{b_n}_{\pm\infty} \underbrace{\log_2(a_n)}_0}$$

$$a_n \rightarrow l \in (0, +\infty) \quad b_n \rightarrow m \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (a_n)^{b_n} = 2^{\underbrace{b_n}_m \underbrace{\log_2 a_n}_{\log_2 l}} \rightarrow 2^{m \log_2 l} = l^m$$

$$a_n \rightarrow 0^+ \quad b_n \rightarrow m \in \mathbb{R}$$

$$(a_n)^{b_n} = 2^{\underbrace{b_n}_m \underbrace{\log_2 a_n}_{-\infty}} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } m > 0 \\ +\infty & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

$$b_n \log_2 a_n \rightarrow \begin{cases} -\infty & \text{se } m > 0 \\ +\infty & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

$$(0^+)^m = \begin{cases} 0 & \text{se } m > 0 \\ +\infty & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

C'è una nuova forma indeterminata

0^0 che in realtà è $(0^+)^0$

$$(+\infty)^m = \begin{cases} +\infty & \text{se } m > 0 \\ 0 & \text{se } m < 0 \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}$$

$(+\infty)^0$ é uma f.i

Nuove forme indeterminate: $1^{\pm\infty}$, 0^0 , $(+\infty)^0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 - 2n}{2n^2 + 1} \right)^{-n} = +\infty$$

$\downarrow 1/2$

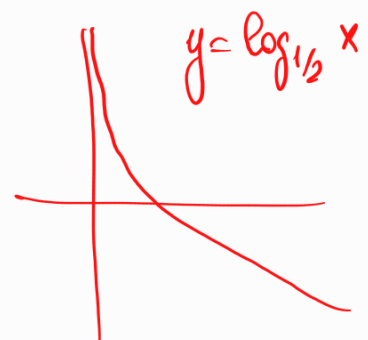
$$\left(\frac{n^2 - 2n}{2n^2 + 1} \right)^{-n} = 2^{\underbrace{-n}_{\downarrow -\infty} \underbrace{\log_2 \left(\frac{n^2 - 2n}{2n^2 + 1} \right)}_{\downarrow \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) = -1}} \rightarrow +\infty$$

$\downarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{\log_{1/2}(n^3)}_{\downarrow -\infty} - \underbrace{\log_{1/2}(n+1)}_{\downarrow +\infty} \right] = (-\infty + \infty)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \log_{1/2} \left(\frac{n^3}{n+1} \right) = -\infty$$

$\downarrow +\infty$



TEOREMA (limiti di succ^{ie} monotone (crescenti o decrescenti))

Sia $\{a_n\}$ una succ^{ie} di numeri reali. Allora:

1) se $\{a_n\}$ è crescente, allora $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$

2) se $\{a_n\}$ è decrescente, allora $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$

Ricordo che $\{a_n\}$ è crescente se
decrescente

$$\begin{matrix} n, m \in \mathbb{N} \\ n > m \end{matrix} \quad \Bigg| \rightarrow \quad \begin{matrix} a_n \geq a_m \\ \leq \end{matrix}$$

Ossia se

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Applicazione: Cerchiamo sup e inf di $a_n = \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1}$
 $n \geq 1$

Controllo se la succ^{ie} è crescente/decrescente

$a_{n+1} \geq a_n$ e verifico.

$$\frac{(n+1)^2 - (n+1) + 1}{(n+1)^2 + 1} \stackrel{?}{\geq} \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1}$$

$$\cancel{1} - \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} \stackrel{?}{\geq} \cancel{1} - \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$\frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} \stackrel{?}{\leq} \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$(n+1)(n^2+1) \stackrel{?}{\leq} n(n^2+2n+2)$$

$$\cancel{n^3} + n^2 + n + 1 \stackrel{?}{\leq} \cancel{n^3} + 2n^2 + 2n$$

$$n^2 + n - 1 \stackrel{?}{\geq} 0 \quad \forall n \geq 1$$

La successione è crescente.

$$\Rightarrow \sup a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1} = 1$$

$$\inf a_n = \min a_n = a_1 = \frac{1}{2} \quad \square$$

Esempio: Trovare sup e inf di

$$a_n = \frac{3n^2 + 2n + 5}{n^2} = \underbrace{3}_{\text{costante}} + \underbrace{\frac{2}{n}}_{\text{decrease}} + \underbrace{\frac{5}{n^2}}_{\text{decrease}}$$

Teor.

$$\Rightarrow \inf a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 3$$

$$\sup a_n = \max a_n = a_1 = 3 + 2 + 5 = 10$$

Dim. teorema (1)

$$a_n \text{ crescente} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

I caso) $\sup a_n = L \in \mathbb{R}$

Fissato $\varepsilon > 0$, $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{\bar{n}} > L - \varepsilon$.

Se $n > \bar{n}$, $a_n \geq a_{\bar{n}}$

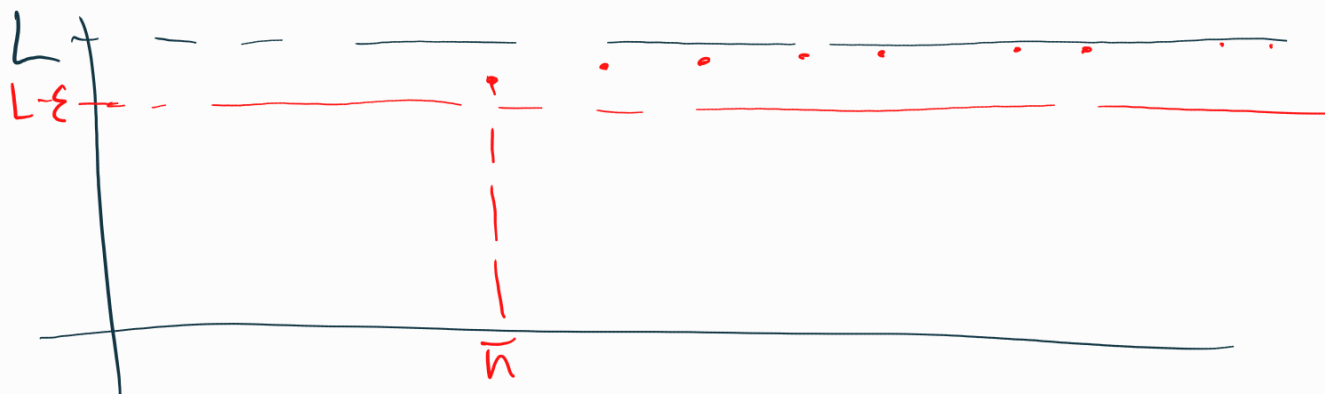
$$L - \varepsilon < a_{\bar{n}} \leq a_n \leq L < L + \varepsilon$$

↑ crescente

Ho provato che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}$ t.c. $\forall n > \bar{n}$ si ha

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Questo è per definizione $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$



Il caso $\sup a_n = +\infty \Leftrightarrow \{a_n\}$ illimitata sup.

arbitrariamente

Fissato $M > 0$, $\exists \bar{n}$ t.c. $a_{\bar{n}} > M$

Se $n > \bar{n}$ $a_n \geq a_{\bar{n}} > M$
 $\nwarrow a_n$ crescente

Cioè $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

□

COROLLARIO Sia $\{a_n\}$ una succ^{ne} crescente. Allora

- $\{a_n\}$ è convergente $\Leftrightarrow \{a_n\}$ è limitata superiormente
- $\{a_n\}$ è divergente a $+\infty \Leftrightarrow \{a_n\}$ è illimitata superiormente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = (1^{+\infty}) \quad \text{forma indeterminata.}$$

TEOREMA

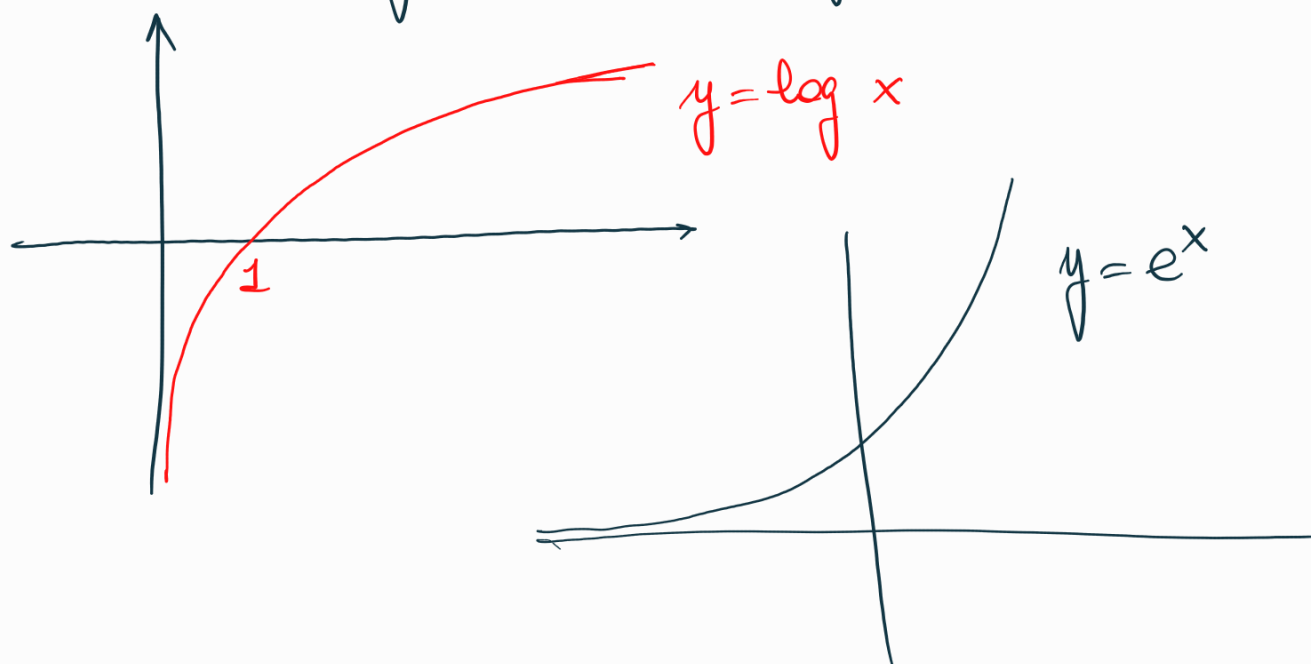
La succ^{ne} $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è strett. crescente e limitata superiormente.

Quindi essa converge a un numero reale,
che viene indicato con e (costante di Nepero, o di Eulero)
e vale

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \simeq 2,7182818284 \dots$$

Si può dimostrare che e è irrazionale

Si definisce $\log x = \ln x = \log_e x$



Conseguenze della def^{ne} di e .

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{n}_{\downarrow +\infty} \underbrace{\log \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\downarrow 0} = (+\infty \cdot 0) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \log \left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_e \right) = \log e = 1$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = (1^{+\infty}) = \frac{1}{e}$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} \rightarrow \frac{1}{e}$$

è la stessa succ^{te} di prima

↓
e

↓
1

3) Se $b_n \rightarrow +\infty$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e$

N.B. b_n non è necessariamente di interi.

DEF Sia $x \in \mathbb{R}$. Si definisce parte intera di x il numero

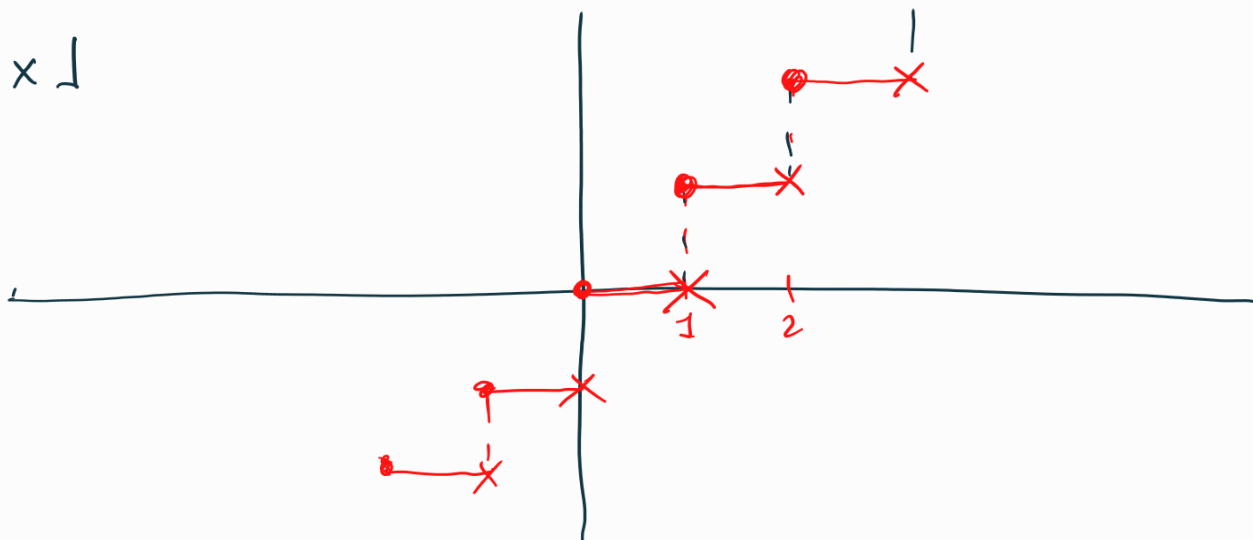
$$\lfloor x \rfloor = \max \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$$

$$\lfloor 2 \rfloor = 2$$

$$\lfloor \pi \rfloor = 3$$

$$\lfloor -\pi \rfloor = -4$$

$$y = \lfloor x \rfloor$$



OSS

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$b_n \rightarrow +\infty \Rightarrow b_n > 0 \text{ defte}$$

$$\left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \leq \left(1 + \frac{1}{\lfloor b_n \rfloor}\right)^{b_n} \leq \left(1 + \frac{1}{\lfloor b_n \rfloor}\right)^{\lfloor b_n \rfloor + 1}$$

$$\left(1 + \frac{1}{\lfloor b_n \rfloor + 1}\right)^{\lfloor b_n \rfloor}$$

$$\left(1 + \frac{1}{\lfloor b_n \rfloor}\right)^{\lfloor b_n \rfloor} \left(1 + \frac{1}{\lfloor b_n \rfloor}\right)$$

↓ ↓
e 1
↓
e

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{\lfloor b_n \rfloor + 1}\right)^{\lfloor b_n \rfloor + 1}}{1 + \frac{1}{\lfloor b_n \rfloor + 1}} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \rightarrow e$$

con $k \rightarrow +\infty$
intero

↓
e

$$\text{se } b_n \rightarrow +\infty \text{ allora } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e$$

e se $b_n \rightarrow -\infty$?

$$\left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \rightarrow (1^{-\infty}) \quad \text{f.i.}$$

Chiamo $c_n = -b_n \rightarrow +\infty$

$$\left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = \left(1 - \frac{1}{c_n}\right)^{-c_n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{c_n}\right)^{c_n}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{c_n-1}{c_n}\right)^{c_n}} = \left(\frac{(c_n-1)+1}{c_n-1}\right)^{c_n} =$$

$$= \boxed{\left(1 + \frac{1}{c_n-1}\right)^{c_n-1}} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{c_n-1}\right)}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \rightarrow e$$

$\downarrow$
 e

Risumendo. Se $b_n \rightarrow +\infty$ opp $b_n \rightarrow -\infty$
 allora $\left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \rightarrow e$.