ANALISI VETTORIALE - LT FISICA 30046 - A.A. 2025/26
LUNGHEZZA DI UNA ELLISSE - 20251003

EUGENIO MONTEFUSCO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
PIAZZALE ALDO MORO 5 - 00185 ROMA

L'ellisse è una conica limitata, rimandiamo alla pagina web *https://it.wikipedia.org/wiki/Ellisse* per definizione e principali proprietà della curva. Dal nostro punto di vista possiamo parlare di una curva regolare piana una cui possibile parametrizzazione è

$$x(t) = (a\cos(t), b\sin(t), 0) \qquad \text{con} \quad t \in [0, 2\pi], \quad a, b > 0$$

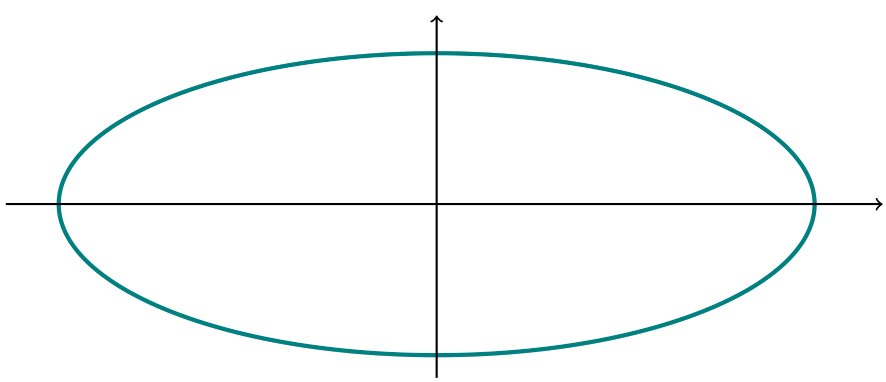
dove i parametri a e b rappresentano le lunghezze dei semiassi, a meno di movimenti rigidi del piano $\{x_3 = 0\}$ possiamo assumere che $a > b$.
La parametrizzazione ha componenti di classe C^∞, proviamo subito la regolarità dell'applicazione scrivendo il vettore velocità e il suo modulo

$$x'(t) = (-a\sin(t), b\cos(t), 0) \qquad \text{e} \qquad \|x'(t)\|_2 = \left(a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)\right)^{1/2} = a\left(1 - e^2\cos^2(t)\right)^{1/2}$$

dove abbiamo introdotto il parametro eccentricità, definito come segue

$$e^2 = \left[1 - \frac{b^2}{a^2}\right] \in (0, 1)$$

tale parametro quantifica la differenza tra i due semiassi della curva, infatti l'eccentricità e è nulla se e solo se l'ellisse ha i semiassi uguali, cioè se è una circonferenza. Inseriamo un'illustrazione che suggerisce l'aspetto della conica.



Posto $\mathcal{E} = \mathrm{Im}(x)$, ricordiamo che, dai risultati enunciati a lezione, possiamo provare a calcolare la lunghezza della curva nel seguente modo:

$$L(\mathcal{E}) = \int_0^{2\pi} \|x'(t)\|_2 dt = 4a\int_0^{\pi/2} \left(1 - e^2\cos^2(t)\right)^{1/2} dt$$

tale integrale (detto ellittico in letteratura) non è risolubile per via elementare (nel senso che non esiste una primitiva in termini di funzioni elementari), possiamo impostare i seguenti conti cercando di stimare l'integrale precedente. Partiamo dal seguente sviluppo

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k x^k = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\ldots\right] x^k$$

ricordando che, per $k \geq 1$, vale

$$(-1)^k \binom{1/2}{k} = \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{k-1-1/2}{k} \right]$$

Da questo segue che

$$\begin{aligned}
L(\mathcal{E}) &= 4a \int_0^{\pi/2} \left(1 - e^2 \cos^2(t)\right)^{1/2} dt = 4a \int_0^{\pi/2} \left[1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-3}{2k} \right] e^{2k} \sin^{2k}(t) \right] dt \\
&= 4a \left[\frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-3}{2k} \right] e^{2k} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k}(t) dt \right] \\
&= 4a \left[\frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-3}{2k} \right] \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2} e^{2k} \right] \\
&= 4a \frac{\pi}{2} \left[1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-3}{2k} \right] \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} e^{2k} \right]
\end{aligned}$$

effettuando uno scambio (non ben motivato) tra serie e integrale.
Se tronchiamo lo sviluppo arrestando k ad 1 otteniamo la seguente approssimazione (di scarso valore...)

$$L(\mathcal{E}) \simeq 4a \int_0^{\pi/2} \left[1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2(t) \right] dt = 4a \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} e^2 \right] = \frac{\pi}{2} a \left[4 - e^2 \right] = \frac{\pi}{2} a \left[\frac{3a^2 + b^2}{2} \right]$$

è, però, possibile aggiungere termini allo sviluppo cercando di migliorare la qualità del nostro calcolo, per esempio considerando qualche termine in più nello sviluppo si ottiene

$$\begin{aligned}
L(\mathcal{E}) &\simeq 4a \int_0^{\pi/2} \left[1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2(t) - \frac{1}{8} e^4 \sin^4(t) - \frac{1}{16} e^6 \sin^6(t) \right] dt \\
&= 4a \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} e^2 - \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2} e^4 - \frac{3}{48} \cdot \frac{15}{48} \cdot \frac{\pi}{2} e^6 \right] = 2\pi a \left[1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 - \frac{5}{256} e^6 \right]
\end{aligned}$$

tutto al costo di un aumento del lavoro computazionale da svolgere.
I calcoli presentati si ispirano, grosso modo, alla prima parte del lavoro *An Overlooked Series for the Elliptic Perimeter* di C.E. Linderholm e A.C. Segal (link *https://doi.org/10.1080/0025570X.1995.11996318*).