ANALISI VETTORIALE - LT FISICA 30046 - A.A. 2025/26
SCHEDA 01 - 20251003

EUGENIO MONTEFUSCO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
PIAZZALE ALDO MORO 5 - 00185 ROMA

ESERCIZIO 1. *Assegnata la curva di parametrizzazione*

$$x(t) = (t - r\sin(t), 1 - r\cos(t), ht) \qquad t \in [0, 4\pi]$$

dove $r, h \geq 0$*:*
i. per quali valori dei parametri la curva è semplice e regolare?
ii. Si calcoli la lunghezza della curva per $h = 0$ *e* $r = 1$*.*

ESERCIZIO 2. *Assegnata la parametrizzazione*

$$\phi(\theta) = (\theta\cos(\theta), \theta\sin(\theta)) \qquad \theta \in [0, 4\pi]$$

i. si provi a disegnarne l'immagine,
ii. si verifichi che definisce una curva semplice e regolare,
iii. se ne calcoli la lunghezza.

ESERCIZIO 3. *Se una massa è distribuita lungo la curva regolare descritta da*

$$\phi(t) = \left(t, t, t^2\right) \qquad t \in [0, 1]$$

con densità lineare pari a $F(x_1, x_2, x_3) = \delta x_1$*, con* $\delta > 0$*, a quanto ammonta l'intera massa?*

ESERCIZIO 4. *La spirale di Archimede è una curva piana descritta dalla parametrizzazione polare* $\rho(\theta) = c\theta$*, con* $c > 0$ *e* $\theta \in [0, 4\pi]$*, allora*
i. si provi a disegnarne l'immagine per $c = 1$*,*
ii. si verifichi che definisce una curva semplice e regolare,
iii. se ne calcoli la lunghezza al variare di c*.*

ESERCIZIO 5. *Data la parametrizzazione* $x(s) = Ae^{Bs}(\cos(s), \sin(s), 1)$*, con* $A, B > 0$ *e* $s \in [1, \pi]$*, allora*
i. si verifichi che definisce una curva semplice e regolare,
ii. se ne calcoli la lunghezza.

ESERCIZIO 6. *Data la parametrizzazione* $x(t)$ *di una curva regolare, con* $t \in [a, b]$*, si provi che*
i. $T'(t)$ *è sempre ortogonale a* $T(t)$*.*
ii. Se $T'(t) = 0$ *per ogni* $t \in [a, b]$*, allora la curva ha un segmento per sostegno.*

SVOLGIMENTI

ESERCIZIO 1. *Assegnata la curva di parametrizzazione*

$$x(t) = (t - r\sin(t), 1 - r\cos(t), ht) \qquad t \in [0, 4\pi]$$

dove $r, h \geq 0$*:*
i. per quali valori dei parametri la curva è semplice e regolare?
ii. Si calcoli la lunghezza della curva per $h = 0$ *e* $r = 1$*.*

DISCUSSIONE. i. La curva possiede una parametrizzazione con componenti di classe C^∞, discutiamo subito la regolarità dell'applicazione scrivendo il vettore velocità e il suo modulo

$$\phi'(t) = (1 - r\cos(t), r\sin(t), h) \qquad |\phi'(t)| = \left(1 - 2r\cos(t) + r^2 + h^2\right)^{1/2}$$

Osserviamo subito che

$$1 - 2r\cos(t) + r^2 \geq 1 - 2r + r^2 = (1-r)^2 \geq 0 \qquad \text{per ogni } r$$

quindi se $h > 0$ il vettore velocità non è mai nullo. Invece se $h = 0$ abbiamo che $|\phi'(t)| = 0$ se e solo se $r = 1$ e $t = 0$ (cioè quando le maggiorazioni precedenti non sono strette), in tal caso la curva è regolare solo a tratti, perché la velocità si annulla per $t = 0$ che è interno all'intervallo di definizione e sul corrispondente punto del sostegno non è possibile definire il versore tangente.
Riguardo alla semplicità osserviamo subito che, se $h > 0$, la curva risulta semplice, infatti se $t \neq s$, abbiamo che

$$(t - r\sin(t), 1 - r\cos(t), ht) \neq (s - r\sin(s), 1 - r\cos(s), hs)$$

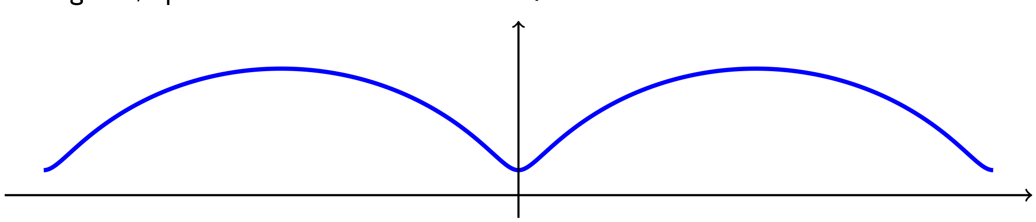
visto che almeno la terza coordinata è sicuramente differente, questa osservazione prova che la curva presenta "problemi" solo quando è piana, cioè contenuta nell'iperpiano $\{x_3 = 0\}$. Se $h = 0$ e $r \leq 1$ abbiamo che se $t \neq s$ segue

$$(t - r\sin(t), 1 - r\cos(t), 0) \neq (s - r\sin(s), 1 - r\cos(s), 0)$$

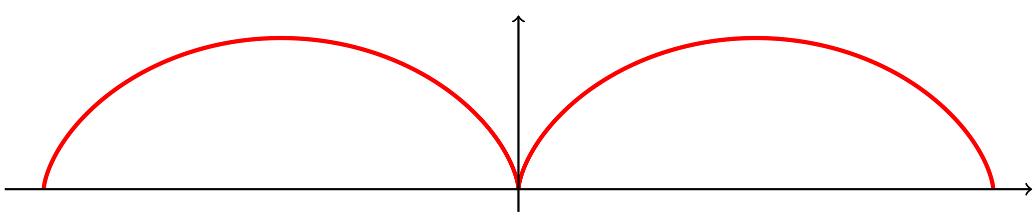
perché la prima componente risulta essere una funzione strettamente crescente. Invece nel caso $h = 0$ e $r > 1$ la curva non risulta semplice, infatti abbiamo che il sostegno della curva è un insieme simmetrico rispetto all'asse y in quanto la prima componente è una funzione dispari di t mentre la seconda è pari, e siccome vale che

$$\phi(0) = (0, 1 - r, 0) \qquad \phi'(0) = (1 - r, 0, 0)$$

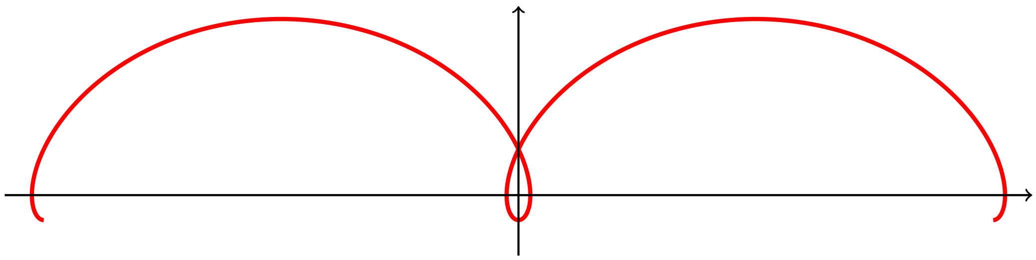
possiamo provare che il sostegno della curva giace nel terzo quadrante per $0 < t \ll 1$, mentre per $t > 0$ e "sufficientemente grande" raggiunge il primo quadrante e questo implica che la curva deve autointersecarsi, perché deve passare per un altro punto ad ascissa nulla, cioè esiste $t_0 > 0$ tale che $\phi(t_0) = (0, y(t_0), 0) = \phi(-t_0)$ (si ricordi che abbiamo osservato che la prima componente è dispari e la seconda pari). Per concludere la discussione inseriamo dei grafici, il primo relativo al caso $h = 0$ e $r = 2/3$



il secondo con $h = 0$ e $r = 1$



il terzo con $h = 0$ e $r = 4/3$



La curva con sostegno blu è regolare, le altre due no, precisamente per la seconda non è ben definito il versore tangente in $(0,0)$, ma è regolare a tratti, invece la terza non è semplice.
ii. La lunghezza richiesta equivale al risultato dell'integrale

$$
\begin{aligned}
L &= 2\int_0^{2\pi} |\phi'(t)|dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos(t))^2+\sin^2(t)}dt \\
&= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos(t)}dt = 2\int_0^{2\pi} 2\sin(t/2)dt = -8\cos(t/2)\Big|_0^{2\pi} = 16
\end{aligned}
$$

dove abbiamo usato la relazione trigonometrica $2\sin^2(t/2) = 1-\cos(t)$ e il fatto che la curva è simmetrica rispetto all'asse y, per cui la sua lunghezza è il doppio della lunghezza per $t \in [0, 2\pi]$. ■

ESERCIZIO 2. *Assegnata la parametrizzazione*

$$\phi(\theta) = (\theta\cos(\theta), \theta\sin(\theta)) \qquad \theta \in [0, 4\pi]$$

i. si verifichi che definisce una curva semplice e regolare,
ii. se ne calcoli la lunghezza.

DISCUSSIONE. i. Verifichiamo che la curva è semplice, infatti se avessimo che

$$\text{se} \qquad \phi(\theta) = \phi(\vartheta) \qquad \text{allora} \qquad ||\phi(\theta)||^2 = \theta^2 = \vartheta^2 = ||\phi(\vartheta)||^2$$

il che prova l'affermazione, visto che $\phi, \vartheta \in [0, 4\pi]$. Per poter affermare che la curva è regolare è sufficiente osservare che le componenti della parametrizzazione sono funzioni di classe C^∞ e che vale

$$\phi'(\theta) = (\cos(\theta) - \theta\sin(\theta), \sin(\theta) + \theta\cos(\theta)) \qquad \text{e} \qquad ||\phi'(\theta)||^2 = \left(1+\theta^2\right) \geq 1$$

È possibile verificare al calcolatore che la curva descritta da ϕ è una spirale.
ii. Impostiamo l'integrale che ci permette di calcolare la lunghezza della curva

$$L(\phi) = \int_0^{4\pi} ||\phi'(\theta)||d\theta = \int_0^{4\pi} \left[1+\theta^2\right]^{1/2} d\theta = \ldots = 2\pi\left[1+16\pi^2\right]^{1/2} + \frac{1}{2}\ln\left(4\pi + \left[1+16\pi^2\right]^{1/2}\right)$$

dove abbiamo sfruttato un noto applicativo online per evitare calcoli noiosi legati alla sostituzione $\theta = \sinh(s)$, che permette di risolvere l'integrale... ■

ESERCIZIO 3. *Se una massa è distribuita lungo la curva descritta da*

$$\phi(t) = \left(t, t, t^2\right) \qquad t \in [0,1]$$

con densità lineare pari a $F(x_1, x_2, x_3) = \delta x_1$*, a quanto ammonta l'intera massa?*

DISCUSSIONE. Il calcolo della massa distribuita lungo il filo è possibile tramite il seguente integrale di linea

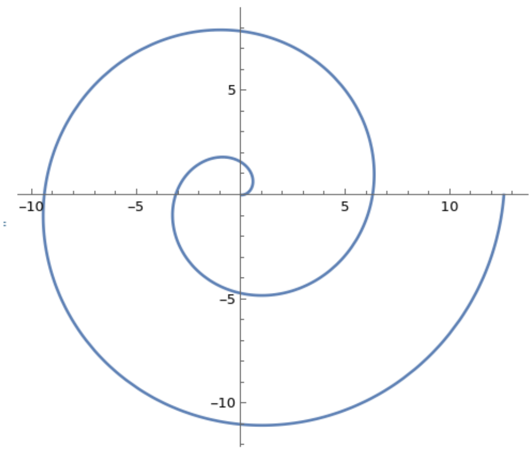
$$M = \int_{\mathrm{Im}(\phi)} F(x)ds = \int_0^1 F(\phi(t))||\phi'(t)||dt = \int_0^1 \delta t\left[2(1+t^2)\right]^{1/2} dt = \sqrt{2}\delta\left[\frac{1}{3}(1+t^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{3}\delta$$

Con il termine "filo" abbiamo indicato il sostegno della curva, lungo cui è distribuita la massa nello spazio. ■

Esercizio 4. *La spirale di Archimede è una curva piana descritta dalla parametrizzazione polare* $\rho(\theta) = c\theta$, *con* $c > 0$ *e* $\theta \in [0, 4\pi]$, *allora*
i. si provi a disegnarne l'immagine per $c = 1$,
ii. si verifichi che definisce una curva semplice e regolare,
iii. se ne calcoli la lunghezza al variare di c.

Discussione. i. & ii. La verifica che la curva è semplice è abbastanza rapida: se l'applicazione non fosse iniettiva avremmo che $x(\theta_1) = x(\theta_2)$, con $\theta_1 \neq \theta_2$, quindi avremmo che

$$x(\theta_1) = x(\theta_2) \qquad \text{quindi} \qquad \|x(\theta_1)\|_2 = \|x(\theta_2)\|_2$$
$$\text{cioè} \qquad \rho(\theta_1) = c\theta_1 = c\theta_2 = \rho(\theta_2)$$



il che implica $\theta_1 = \theta_2$ contraddicendo l'assunzione iniziale. La curva è anche regolare visto che

$$x'(\theta) = c\,(\cos(\theta) - \theta\sin(\theta), \sin(\theta) + \theta\cos(\theta))$$
$$\text{da cui} \qquad \|x'(\theta)\|_2^2 = c^2\left(1+\theta^2\right) \neq 0$$

iii. Il calcolo della lunghezza della curva non presenta difficoltà concettuali, ma solo di calcolo ed è abbastanza meccanico come segue

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_0^{4\pi} \|x'(\theta)\|_2^2 d\theta = c\int_0^{4\pi}\left[1+\theta^2\right]^{1/2} =^* c\int_0^{\ln\left(4\pi+\sqrt{16\pi^2+1}\right)} \cosh^2(u)du \\ &= \frac{c}{4}\int_0^{\ln\left(4\pi+\sqrt{16\pi^2+1}\right)}\left(e^u+e^{-u}\right)^2 du = \frac{c}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2u}+2u-\frac{1}{2}e^{-2u}\right]_0^{\ln\left(4\pi+\sqrt{16\pi^2+1}\right)} \\ &= \frac{c}{8}\left[\left(4\pi+\sqrt{16\pi^2+1}\right)^2 + 4\ln\left(4\pi+\sqrt{16\pi^2+1}\right) - \frac{1}{\left(4\pi+\sqrt{16\pi^2+1}\right)^2}\right] \end{aligned}$$

quindi la dipendenza della lunghezza dal parametro c è lineare.
Si noti che nel calcolo del precedente integrale abbiamo utilizzato il seguente notevole cambio di variabili

$$\theta = \sinh(u) = \frac{1}{2}\left[e^u - e^{-u}\right] \qquad \text{con} \qquad d\theta = \cosh(u)du = \frac{1}{2}\left[e^u + e^{-u}\right]du$$

che ha trasformato $1+\theta^2$ in un quadrato perfetto... ■

Esercizio 5. *Data la parametrizzazione* $x(s) = Ae^{Bs}(\cos(s), \sin(s), 1)$, *con* $A, B > 0$ *e* $s \in [1, \pi]$, *allora*
i. si verifichi che definisce una curva semplice e regolare,
ii. se ne calcoli la lunghezza.

Discussione. i. la curva è semplice in quanto $\|x(s)\|_2^2 = 2A^2e^{2Bs}$ e tale funzione è strettamente crescente, quindi iniettiva. Inoltre possiamo dedurre la regolarità dell'applicazione dal fatto che

$$x'(s) = Ae^{Bs}(B\cos(s) - \sin(s), B\sin(s) + \cos(s), 1) \qquad \text{e} \qquad \|x'(s)\|_2^2 = A^2e^{2Bs}\left(B^2+2\right) \neq 0$$

ii. Ricorriamo alla (ormai) nota caratterizzazione della lunghezza di una curva regolare calcolando il seguente integrale

$$L = \int_1^\pi \|x'(s)\|_2 ds = \int_1^\pi A\left[B^2+2\right]^{1/2} e^{Bs}ds = A\left[B^2+2\right]^{1/2}\frac{1}{B}\left[e^{Bs}\right]_1^\pi = A\frac{\left[B^2+2\right]^{1/2}}{B}\left[e^{B\pi} - e^B\right]$$

■

Esercizio 6. *Data la parametrizzazione* $x(t)$ *di una curva regolare, con* $t \in [a, b]$, *si provi che*
i. $T'(t)$ *è sempre ortogonale a* $T(t)$.
ii. Se $T'(t) = 0$ *per ogni* $t \in [a, b]$, *allora la curva ha un segmento per sostegno.*

DISCUSSIONE. i. La prima affermazione è abbastanza semplice, infatti sappiamo che

$$||T(t)||_2 = 1 \qquad \text{cioè} \qquad T(t)\cdot T(t) = 1 \qquad \text{per ogni } t \in [a,b]$$

e derivando rispetto alla variabile t ricaviamo che

$$0 = \frac{d}{dt}[T(t)\cdot T(t)] = T'(t)\cdot T(t) + T(t)\cdot T'(t) = 2\left(T'(t)\cdot T(t)\right) \qquad \text{per ogni } t \in [a,b]$$

ii. Analizziamo il significato analitico del fatto che il versore tangente T è indipendente dalla variabile t

$$T'(t) = (0,0,0) = O \qquad \text{allora} \qquad T(t) = w_0 \quad \text{per ogni } t \in [a,b] \text{ quindi}$$

$$x'(t) = v(t)w_0$$

$$x(t) = x_0 + \left[\int_a^t v(s)ds\right] w_0 = x_0 + V(t)w_0$$

per il teorema fondamentale del calcolo integrale, e segue immediatamente che il sostegno della curva è contenuto in una retta visto che

$$x(t) - x(s) = [V(t) - V(s)]w_0$$

cioè tutti i punti dell'immagine della parametrizzazione giacciono in uno spazio affine di dimensione 1.

■

QUIZ

Si determini la veridicità di ognuna delle affermazioni che seguono

---

QUIZ 1. $x(t) = \left(0,0,-\sqrt[3]{t}\right)$, *con* $t \in [-2,\pi]$, *è una curva regolare.*

Falso: $x'(t) = \left(0,0,-\dfrac{1}{3t^{2/3}}\right)$, quindi non è definito il vettore velocità per $t = 0$.

QUIZ 2. $x(t) = (0,t,2t)$, *con* $t \in [-1,1]$, *ha versore tangente costante.*

Vero: $x'(t) = (0,1,2)$ per ogni $t \in [-1,1]$.

QUIZ 3. $x(t) = (-t,t,2t)$, *con* $t \in [0,1]$, *ha versore tangente costante.*

Vero: $x'(t) = (-1,1,2)$ per ogni $t \in [0,1]$.

QUIZ 4. $x(t) = (-t,t,2t)$, *con* $t \in [0,1]$, *è una curva chiusa.*

Falso: il vettore velocità è il vettore costante $x'(t) = (-1,1,2)$ per ogni $t \in [0,1]$, quindi la curvatura è nulla e la curva non può "tornare indietro" e chiudersi...

QUIZ 5. $x(t) = (t\cos(t), t\sin(t), 1)$, *con* $t \in [0,\pi]$, *ha versore tangente costante.*

Falso: $x'(t) = (\cos(t) - t\sin(t), \sin(t) + t\cos(t), 0)$, ed è facile verificare che il vettore non è costante visto che $x'(0) = (1,0,0)$ e $x'(\pi) = (-1,-\pi,0)$.

QUIZ 6. $x(t) = (\sin(t), \cos(t), 1)$, *con* $t \in [0,1]$, *ha versore tangente costante.*

Falso: $x'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$, il modulo del vettore è costante, ma non la direzione.

QUIZ 7. $x(t) = (\sin(t), \cos(t), -t)$, *con* $t \in [0,\pi]$, *è una curva planare.*

Falso: la curva è un'elica e la torsione non è nulla!
È anche possibile verificare che $x(0) = A = (0,1,0)$, $x(\pi/6) = B = (1/2, \sqrt{3}/2, -\pi/6)$, $x(\pi/3) = C = (\sqrt{3}/2, 1/2, -\pi/3)$ e $x(\pi/2) = D = (1,0,-\pi/2)$, e che i vettori

$$\vec{AB} = (1/2, \sqrt{3}/2 - 1, -\pi/6) \qquad \vec{AC} = (\sqrt{3}/2, -1/2, -\pi/3) \qquad \vec{AD} = (1, -1, -\pi/2)$$

non sono complanari visto che

$$\det \begin{vmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 1 \\ \sqrt{3}/2 - 1 & -1/2 & -1 \\ -\pi/6 & -\pi/3 & \pi/2 \end{vmatrix} = \frac{\pi}{24}(4\sqrt{3} - 5) \neq 0$$

QUIZ 8. $x(t) = (a\sin(t), b\cos(t), ht)$, *con* $t \in [0,\pi]$ *e* $a, b \neq 0$*, è una curva planare per ogni* h*.*

Falso: la curva è un'elica (a sezione ellittica) per ogni $h \neq 0$ e si può ragionare come nell'esercizio precedente.
