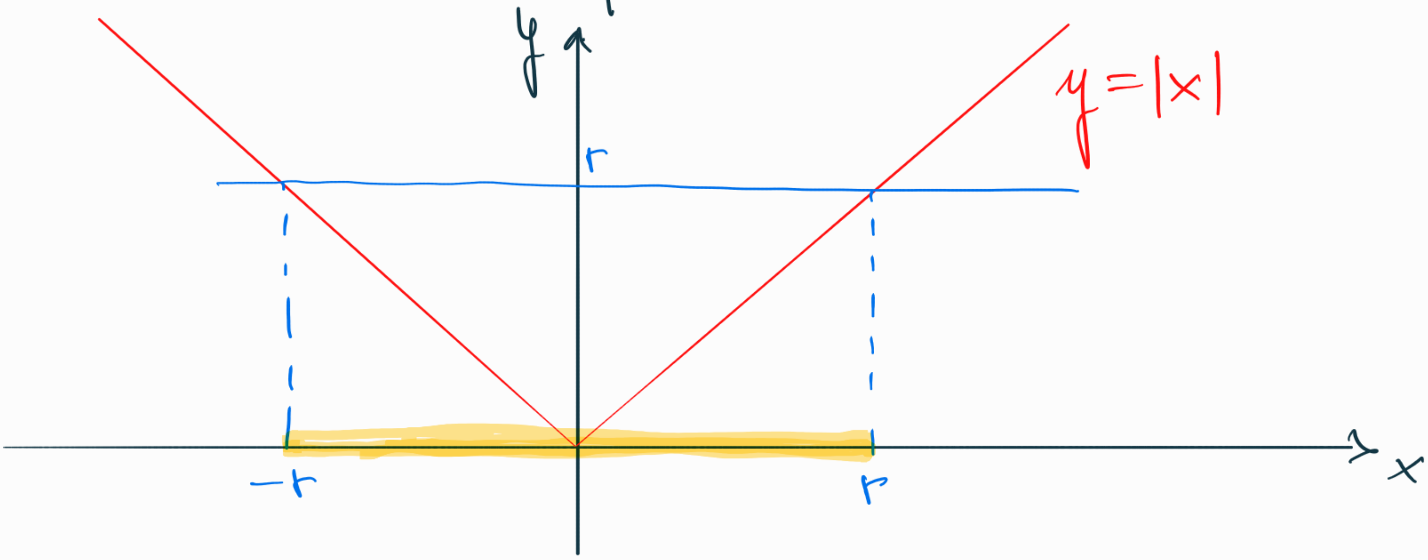
Valore assoluto

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



1) $|x| \geq 0$, $\quad |x| = 0 \iff x = 0$ (già provato)

2) $|x| = r > 0 \iff x = \pm r$ (già visto) $(r > 0)$

3) $|xy| = |x|\,|y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. (già visto).

4) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad y \neq 0$. (dim. simile)

5) Sia $r \geq 0$. Allora

$$|x| \underset{<}{\leq} r \iff -r \underset{<}{\leq} x \underset{<}{\leq} r$$

Dim. a) vedi grafico

b) $|x| \leq r$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq r \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ \cancel{-x \leq r} \quad x \geq -r \end{cases}$$

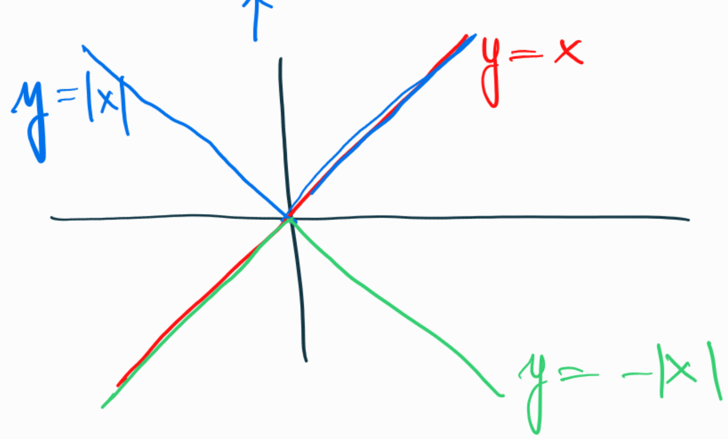
$$(0 \le x \le r) \ \vee \ (-r \le x < 0)$$

$$\Updownarrow$$

$$-r \le x \le r$$

5') $\quad |x| \ge r \iff (x \le -r) \vee (x \ge r) \qquad (r \ge 0)$

6) $\quad -|x| \le x \le |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$



<u>Dim</u> $\quad$ a) facendo i vari casi $\quad x \ge 0, \quad x < 0$

b) $\quad |x| \le \underbrace{|x|}_{r}$

$$\overset{(5)}{\Updownarrow}$$

$$-|x| \le x \le |x|$$

7) dis. triangolare

$$|x+y| \le |x| + |y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

<u>dim</u> $\quad$ a) facendo tutti i casi

b) dim. sintetica:

6)
$$-|x| \leq x \leq |x|$$
$$-|y| \leq y \leq |y|$$

sommo

$$\underbrace{-|x|-|y|}_{-r} \leq x+y \leq \overbrace{|x|+|y|}^{=r}$$

$$\Updownarrow (5)$$

$$|x+y| \leq r = |x|+|y| \qquad \square$$

$|x|$ si interpreta come "la distanza di x da 0"

$|x-y|$ " " " "la distanza di x da y"

Per esempio, un intorno circolare di centro x_0 e raggio r è

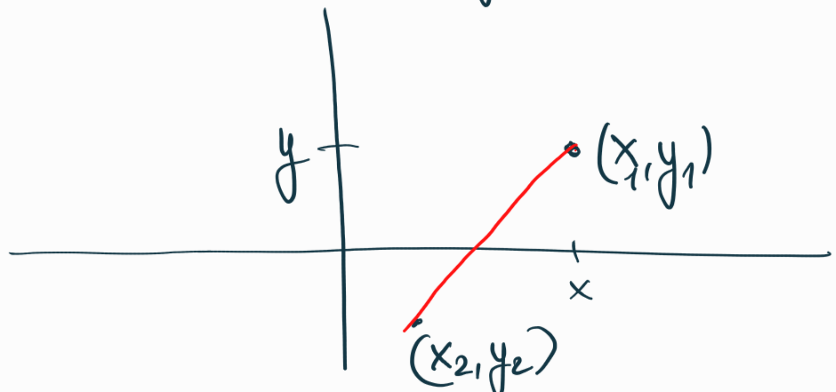
$$I_r(x_0) = (x_0-r, x_0+r) = \{x : |x-x_0| < r\} =$$
$$= \{x \text{ che distano da } x_0 \text{ meno di } r\}$$

Spesso la dis. triangolare si scrive così:

$$\boxed{|x-y| = |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z|+|z-y|.}$$

<u>ossia</u>: la distanza di x da y è $\leq$
della somma della distanza di x da z
e " " " z da y.

In $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$



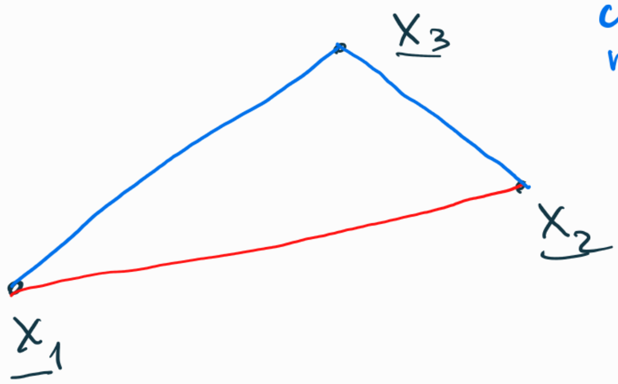
In $\mathbb{R}^2$ si introduce una distanza tra due punti

$$\underline{x}_1 = (x_1, y_1) \qquad \underline{x}_2 = (x_2, y_2)$$

$$d(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

e vale la dis. triangolare

$$\|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\| \leq \|\underline{x}_1 - \underline{x}_3\| + \|\underline{x}_3 - \underline{x}_2\|$$



che corrisponde alla nota proprietà dei triangoli: ogni lato è $\leq$ della somma degli altri due.

7') dis. triangolare per la differenza:

$$\boxed{\big||x| - |y|\big| \leq |x-y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}}$$

Si dimostra a partire dalla dis. triangolare

$$|x| = |(x-y)+y| \underset{(7)}{\leq} |x-y| + |y|$$

cioè $\quad |x| - |y| \leq |x-y|$

Scambiando i ruoli di x e y

$$|y| - |x| \leq |x-y|$$

$$|x| - |y| \geq -|x-y|$$

$$\underbrace{-|x-y|}_{-r} \leq |x|-|y| \leq \underbrace{|x-y|}_{r}$$

cioè (5)

$$\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$$

---

8) $|x|^2 = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$||x|| = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice <u>pari</u> se

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

esempi di funzioni pari:

$f(x) = x^2$, x^4, $\cos x$, $\sin^2 x$, $\sin(x^4)$, $\dfrac{1}{x^4}$

---

9) $|x|$ è una funzione pari

$$|-x| = |x|$$

$E \subseteq \mathbb{R}$ è limitato se è limitato superiorm. e inferiormente,
cioè se ammette un maggiorante, cioè un $M \in \mathbb{R}$

t.c. $\quad x \leq M \quad \forall x \in E$.

e ammette un minorante, cioè un $m \in \mathbb{R}$ |

t.c. $\quad m \leq x \quad \forall x \in E$

10) Un insieme $E \subset \mathbb{R}$ è limitato - se e solo se $\exists\ K \geq 0$ t.c.

$$|x| \leq K \qquad \forall\ x \in E$$

(da continuare....)