

TEOREMA (Aritmetica dei limiti)

Siano $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = m \in \mathbb{R}$. Allora:

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = l + m$

2) Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha l + \beta m.$$

(linearità del limite)

In particolare, se $\alpha = 1$, $\beta = -1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = l - m$$

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = lm$.

4) se $m \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{m}$$

OSS se $m \neq 0$, allora

$b_n \neq 0$ def^{te}
(permanenza del segno)

5) se $m \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{m}$

$a_n \cdot \frac{1}{b_n}$

1) e 2) già provati.

3) Dobbiamo provare che $a_n b_n \rightarrow lm$

$$\begin{aligned} 0 \leq |a_n b_n - lm| &= |(a_n b_n - a_n m) + (a_n m - lm)| = \\ &= |a_n (b_n - m) + m (a_n - l)| \leq (\text{dis. triang.}) \\ &\leq \underbrace{|a_n|}_{\text{limitato}} \underbrace{|b_n - m|}_{\downarrow 0} + \underbrace{|m|}_{\text{costante}} \underbrace{|a_n - l|}_{\downarrow 0} \xrightarrow{(\pm)} 0 \end{aligned}$$

$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \Rightarrow a_n$ limitato

Quindi si applica il thm. dei carabinieri e abbiamo finito.

4) se $m \neq 0$, allora $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{m}$

Devo provare che

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{m} \right| \text{ tende a zero per } n \rightarrow +\infty$$

$$0 \leq \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{m} \right| = \frac{|m - b_n|}{|b_n m|} = \frac{|m - b_n|}{m b_n} \leq (*)$$

oss. definitivamente b_n e m hanno lo stesso segno $\Rightarrow$ tolgo il $| \cdot |$

Supponiamo per semplicità $m > 0$
 $\Rightarrow$ def^{te} $b_n > \frac{m}{2} > 0$

$$\Rightarrow \text{def}^{\text{te}} \quad \frac{1}{b_n} < \frac{2}{m}$$

$$(*) \leq \frac{2}{m^2} \underbrace{|b_n - m|}_{\downarrow \delta} \rightarrow 0 \quad \square$$

$$5) \quad \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{l}{m}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \underbrace{a_n}_{\downarrow l} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{b_n}\right)}_{\downarrow \frac{1}{m}} \xrightarrow{(3)} l \cdot \frac{1}{m} = \frac{l}{m} \quad \square$$

Vogliamo estendere l'aritmetica dei limiti ai casi in cui almeno una tra $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tenda a $\pm\infty$, oppure un denominatore tenda a zero.

Esempio: se $\begin{matrix} a_n \rightarrow +\infty \\ b_n \rightarrow -2 \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow +\infty$

PROP. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = m \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = +\infty$.

Questo risultato si indica più succintamente
 $" +\infty + m = +\infty "$ $\forall m \in \mathbb{R}$
 $" +\infty + \infty = +\infty "$

Dim

$$\left[\begin{array}{l} \text{oss} \quad \text{se } b_n \rightarrow m \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{def}^{\text{te}} \quad b_n > m-1. \\ \text{se } b_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \text{def}^{\text{te}} \quad b_n > 0 \\ \text{In ogni caso} \quad b_n > K \in \mathbb{R} \quad \text{def}^{\text{te}}. \end{array} \right]$$

$$a_n + b_n > a_n + K \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\text{def}^{\text{te}} \quad \left(\text{Per } M > 0 \text{ fissato, } a_n + K > M \Leftrightarrow a_n > M - K \text{ vers def}^{\text{te}} \right)$$

Thm. del carabinieri

$$\Rightarrow a_n + b_n \rightarrow +\infty$$

□

In realtà dobbiamo provare di più:

$$\boxed{\text{PROP} \quad \text{se } a_n \rightarrow +\infty, \quad b_n \text{ limitata inferiormente} \quad \Bigg| \quad \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow +\infty}$$

Corrispondente per $a_n \rightarrow -\infty$:

$$\boxed{\text{PROP} \quad \text{se } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \\ \text{e } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}}$$

(in realtà basta: $\{b_n\}$ limitata superiormente)

$$\text{allora } \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = -\infty.$$

In breve

$$"- \infty + m = -\infty" \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

$$"- \infty - \infty = -\infty"$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{n^4}_{+\infty} + \underbrace{(-1)^n}_{\text{limitata}} \right) = +\infty$$

Cosa succede ad $a_n + b_n$

se $a_n \rightarrow +\infty$, $b_n \rightarrow -\infty$?

Può succedere di tutto. Esempi:

$$\begin{array}{l} a_n = 2n \rightarrow +\infty \\ b_n = -n \rightarrow -\infty \end{array} \quad \Bigg| \Rightarrow a_n + b_n = 2n - n = n \rightarrow +\infty$$

$$\begin{array}{l} a_n = n \rightarrow +\infty \\ b_n = -2n \rightarrow -\infty \end{array} \quad \Bigg| \Rightarrow a_n + b_n = n - 2n = -n \rightarrow -\infty$$

$$\begin{array}{l} a_n = n + 5 \rightarrow +\infty \\ b_n = -n \rightarrow -\infty \end{array} \quad \Bigg| \Rightarrow a_n + b_n = 5 \rightarrow 5$$

$$\begin{array}{l} a_n = n + (-1)^n \rightarrow +\infty \\ b_n = -n \rightarrow -\infty \end{array} \quad \Bigg| \Rightarrow a_n + b_n = (-1)^n \text{ non ha limite.}$$

Poiché non si può dire automaticamente il risultato del $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n)$ se $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow -\infty$.

si dice anche che

" $+\infty - \infty$ " è una forma indeterminata.

In questi casi si risolve il limite con un'analisi supplementare, caso per caso.

Vediamo i prodotti.

<u>PROP</u>	$\begin{array}{l} a_n \rightarrow +\infty \\ b_n \rightarrow m \in \mathbb{R} \end{array} \Bigg \Rightarrow a_n b_n \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } m \in (0, +\infty] \\ -\infty & \text{se } m \in [-\infty, 0) \end{cases}$
-------------	--

Questa prop. si scrive brevemente

$$"+\infty \cdot m = +\infty" \quad \forall m > 0$$

$$"+\infty \cdot m = -\infty" \quad \forall m < 0.$$

$$"+\infty \cdot (+\infty) = +\infty"$$

$$"+\infty \cdot (-\infty) = -\infty"$$

Dim se $b_n \rightarrow m \in (0, +\infty) \Rightarrow \text{def}^{\text{te}} b_n > \frac{m}{2} > 0$

$$b_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \text{def}^{\text{te}} b_n > 1$$

In ogni caso $b_n > k > 0 \quad \text{def}^{\text{te}}$

$$\underbrace{a_n b_n}_{> k} \overset{\text{def}^{\text{te}}}{>} k a_n \rightarrow +\infty$$

Fisso $M > 0$. voglio che sia $k a_n > M \quad \text{def}^{\text{te}}$

$$a_n > \frac{M}{k}$$

vero def^{te} .

Oss. In realtà in questa dim. ci è servito solo che fosse

$$b_n \geq c > 0 \quad \text{def}^{\text{te}}$$

Per esempio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\underbrace{3 + 2 \sin n}_{\forall 3-2=1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \underbrace{(-3 + 2 \sin n)}_{\substack{\text{M} \\ -1}} = -\infty$$

Analogoamente:

$$\text{Se } \begin{matrix} a_n \rightarrow -\infty \\ b_n \rightarrow m \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow a_n b_n \rightarrow \begin{cases} -\infty \\ +\infty \end{cases} \quad \begin{matrix} m \in (0, +\infty] \\ m \in [-\infty, 0) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_n \rightarrow -\infty \\ b_n \rightarrow -5 \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow a_n b_n \rightarrow +\infty$$

$$"- \infty \cdot m = -\infty" \quad \forall m > 0$$

$$"- \infty \cdot m = +\infty" \quad \forall m < 0$$

$$"- \infty \cdot (+\infty) = -\infty"$$

$$"- \infty \cdot (-\infty) = +\infty"$$

Resta fuori da questa analisi il caso in cui

$$\begin{matrix} a_n \rightarrow \pm\infty \\ b_n \rightarrow 0 \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow \text{in questo caso può succedere di tutto}$$

$$\begin{matrix} a_n = n^2 \rightarrow +\infty \\ b_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow a_n b_n = \frac{n^2}{n} = n \rightarrow +\infty$$

$$\begin{matrix} a_n = n \rightarrow +\infty \\ b_n = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0 \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow a_n b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Fare esempi di $a_n \rightarrow +\infty$ t.c.
 $b_n \rightarrow 0$

$2nb_n \rightarrow 5$, a_nb_n non ha limite

Quindi si dice che
" $\pm\infty \cdot 0$ " è una forma indeterminata.
(si vede caso per caso cosa succede)

Rapporti di successioni $\frac{a_n}{b_n}$

PROP se $|b_n| \rightarrow +\infty$, allora $\frac{1}{b_n} \rightarrow 0$

Questo è vero in particolare
se $b_n \rightarrow +\infty$ opp $b_n \rightarrow -\infty$
ma anche $b_n = (-1)^n n$

Dim.

$$\frac{1}{b_n} \stackrel{?}{\rightarrow} 0.$$

Devo provare, fissato $\varepsilon > 0$, che $\left| \frac{1}{b_n} \right| < \varepsilon$ def^{te}.

$$\left| \frac{1}{b_n} \right| < \varepsilon \iff \frac{1}{|b_n|} < \varepsilon \iff |b_n| > \frac{1}{\varepsilon}$$

vero def^{to}
perché $|b_n| \rightarrow +\infty$

Per esempio $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + 4} = 0$

PROP. se $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ $b_n \rightarrow \pm\infty$

allora $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$

Dim $\frac{a_n}{b_n} = \underbrace{a_n}_{l \in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\frac{1}{b_n}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$ $\square$

Invece se $b_n \rightarrow \pm\infty$ e anche $a_n \rightarrow \pm\infty$, allora può succedere di tutto per $\frac{a_n}{b_n}$ (fare esempi)

Quindi si dice che " $\frac{\infty}{\infty}$ " è una forma indeterminata (bisogna vedere caso per caso).

$$\frac{l}{\pm\infty} = 0 \quad \forall l \in \mathbb{R}$$

In realtà se $b_n \rightarrow \pm\infty$, basta che a_n sia limitata per concludere che

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$$

limitata infinitesima

$$\frac{a_n}{b_n} = \underbrace{a_n}_{\text{limitata}} \cdot \underbrace{\frac{1}{b_n}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty}$

$$\frac{4 \sin(n^2) - 3 \cos n}{5 - n^2} = 0$$

$\rightarrow -\infty$

Cosa succede per una frazione in cui il denominatore tende a zero? $\frac{a_n}{b_n}$ con $b_n \rightarrow 0$

Bisogna dare una definizione che permetta di distinguere se $b_n \rightarrow 0$ "da numeri positivi" o "da numeri negativi"

DEF Sia $\{a_n\}$ una succ^{te} di numeri reali, e sia $l \in \mathbb{R}$. Diremo che $\{a_n\}$ tende a l "per eccesso", o "dall'alto" "per difetto", "dal basso"

se $a_n \rightarrow l$ e in più $a_n > l$ def^{te}.

In tal caso scriveremo $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l^+$

" $- l^-$

Equivalentemente $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l^+$ se

$\forall \varepsilon > 0$, si ha $l < a_n < l + \varepsilon$ def^{te}
 $l - \varepsilon < a_n < l$

Esempi. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

posso essere più preciso: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0^+$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n^2} \right) = 0^-$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n^2} \right) = 2^-$$

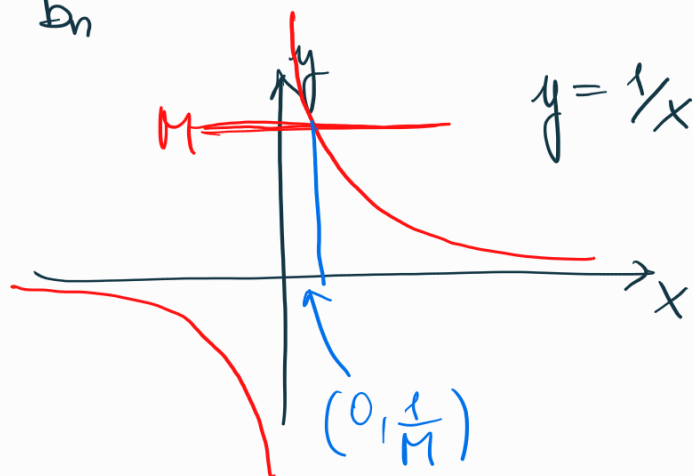
PROP se $b_n \rightarrow 0^+$, allora $\frac{1}{b_n} \rightarrow +\infty$ (1)
 $b_n \rightarrow 0^-$, allora $\frac{1}{b_n} \rightarrow -\infty$

Dim(1) Su b_n sappiamo:

$\forall \varepsilon > 0$ si ha $0 < b_n < \varepsilon$ def^{te}

Fisso $M > 0$, voglio provare che $\frac{1}{b_n} > M$ def^{te}.

$\frac{1}{b_n} > M \iff 0 < b_n < \frac{1}{M}$ vero def^{te} per l'ipotesi su b_n



$$\frac{1}{x} > M \iff 0 < x < \frac{1}{M}$$

Se $b_n \rightarrow 0^-$, si ha $-b_n \rightarrow 0^+$

$$\Rightarrow \frac{1}{-b_n} \rightarrow +\infty$$

$$\frac{1}{b_n} = - \left(\frac{1}{-b_n} \right) \rightarrow -\infty \quad \square$$

Vedremo che se $b_n \rightarrow 0^+$ e $a_n \rightarrow l$

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \left(\frac{1}{b_n} \right) \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } l \in (0, +\infty] \\ -\infty & \text{se } l \in [-\infty, 0) \end{cases}$$

↘ +∞