

$$\mathbb{Q} = \{\text{numeri razionali}\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \pm \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{N}, m \neq 0 \right\}$$



$\{\pm \text{sviluppo decimale finiti oppure periodici}\}$

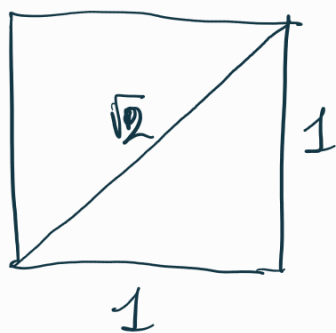
es. $324,879212121\dots = 324,879\overline{21}$

$$-1,25 = -1,24\overline{9}$$

$$0,\overline{9} = 1$$

Con i razionali si possono fare le 4 operazioni,

ma non si può fare
sempre la radice quadrata.
(e altri difetti).



Un modo di introdurre i numeri reali è quello di considerare tutti gli sviluppi decimali.

$$\mathbb{R} = \left\{ \pm \text{sviluppi decimali qualsiasi (finiti, periodici, non periodici)} \right\}$$

(che non finiscono con 9)

$\mathbb{R}$ contiene $\mathbb{Q}$, ma contiene molti altri numeri, i più famosi dei quali sono:

$$\pi = 3,1415926 \dots$$

$$\sqrt{2} = 1,4142135 \dots$$

$$e = 2,7182818284 \dots$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{10^k}$$

$$d_0 = 3, d_1 = 1, d_2 = 4 \dots$$

$$3 < \pi < 4$$

$$3,1 < \pi < 3,2$$

$$3,14 < \pi < 3,15$$

Come si definiscono le operazioni?

$$\pi + \sqrt{2} = ?$$

$$\pi = 3,1415926 \dots$$

$$\sqrt{2} = 1,4142135$$

$$3 + 1 = 4$$

$$3,1 + 1,4 = 4,5$$

$$3,14 + 1,41 = 4,55$$

$$3,141 + 1,414 = 4,555$$

$$3,1415 + 1,4142 = 4,5557$$

man mano le cifre si "stabilizzano", e otteniamo lo sviluppo decimale infinito di $\pi + \sqrt{2}$

$$\frac{4}{9} + \frac{5}{9} = 1$$

$$\begin{array}{r} 0, \overline{4} \\ 0, \overline{5} \\ \hline \end{array}$$

$$0,99 \dots = 0, \overline{9} = 1$$

Si definiscono le operazioni e la relazione d'ordine " $\leq$ ".
Continuano a valere tutte le proprietà dei numeri razionali viste la volta scorsa e in più vale una proprietà "di completezza", che si può enunciare in vari modi equivalenti, per esempio:

1) ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato superiormente ammette estremo superiore.

Questo non vale se si considerano solo i numeri razionali.
Per es.

$$E = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x^2 < 2\}$$

è limitato superiormente.

Ma E non ammette estremo superiore nei razionali.

ma E ammette estremo superiore nei reali

(che vale $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Altro modo equivalente di esprimere l'assioma di completezza

2) Dati due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $a \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$.

esiste $c \in \mathbb{R}$ (elemento separatore) t.c.

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

Nei razionali questo è falso.

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x^2 < 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x^2 > 2\}$$

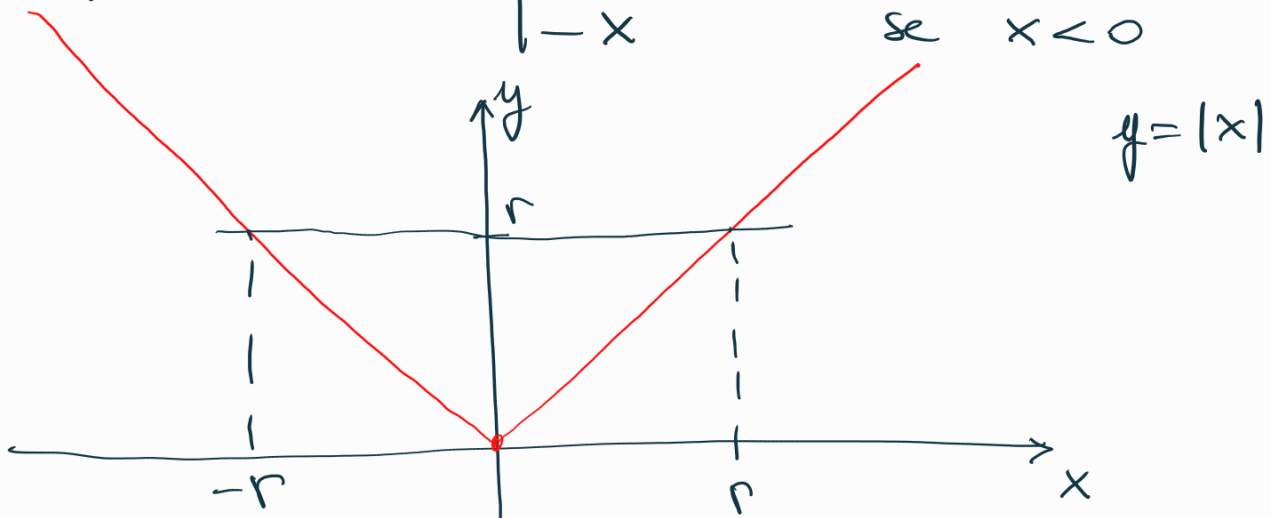
$$a \leq b \quad \begin{array}{l} \forall a \in A \\ \forall b \in B \end{array}$$

Nei razionali non c'è elemento separatore.

Prop (densità dei razionali e degli irrazionali).
In ogni intervallo $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
ci sono infiniti numeri razionali e infiniti numeri
irrazionali

Valore assoluto.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$$\left| \frac{3}{4} \right| = \frac{3}{4}$$

$$|- \pi| = \pi$$

$$1) |x| \geq 0, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$2) |x| = r > 0 \Leftrightarrow x = \pm r$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x = r \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} x < 0 \\ -x = r \end{array} \right. \end{array}$$

$$x = r$$

$$x = -r < 0$$

$$3) |xy| = |x| |y|$$

Dim. $\therefore$ si separano vari casi

$$\begin{array}{l} a) \quad \underline{x \geq 0}, \quad y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad xy \geq 0 \\ |xy| \stackrel{?}{=} |x| |y| \quad \quad \quad xy \stackrel{?}{=} xy \quad \text{si.} \\ \begin{array}{ccc} \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ xy & x & y \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} b) \quad x \geq 0, \quad y < 0 \quad \Rightarrow \quad xy \leq 0 \\ |xy| \stackrel{?}{=} |x| |y| \quad \quad \quad -xy \stackrel{?}{=} x(-y) \quad \text{si.} \\ \begin{array}{ccc} \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ -xy & x & -y \end{array} \end{array}$$

$$c) \quad x < 0, \quad y \geq 0$$

$$d) \quad x < 0, \quad y < 0$$